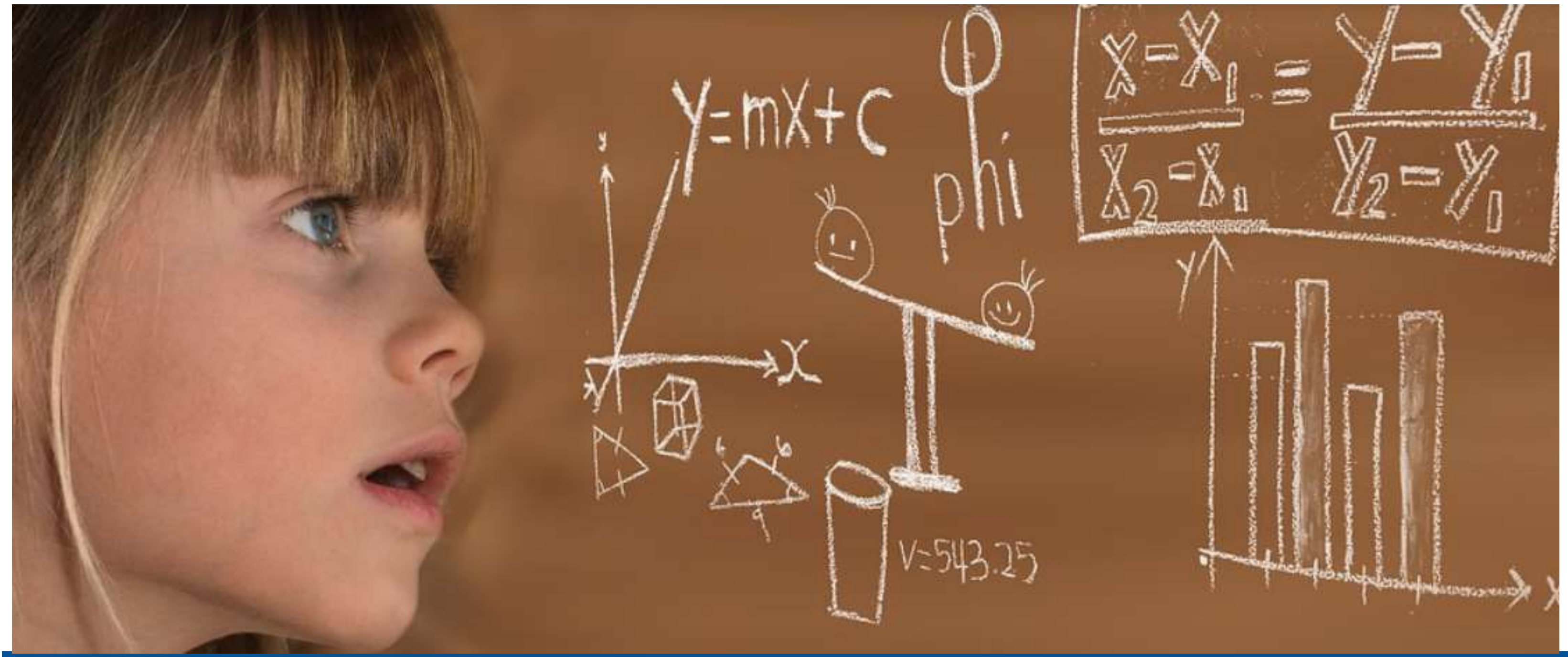
Avvio al calcolo letterale nel primo biennio di scuola secondaria di secondo grado

Dall'aritmetica all'algebra



Aurelia Orlandoni
Domingo Paola

Parole chiave

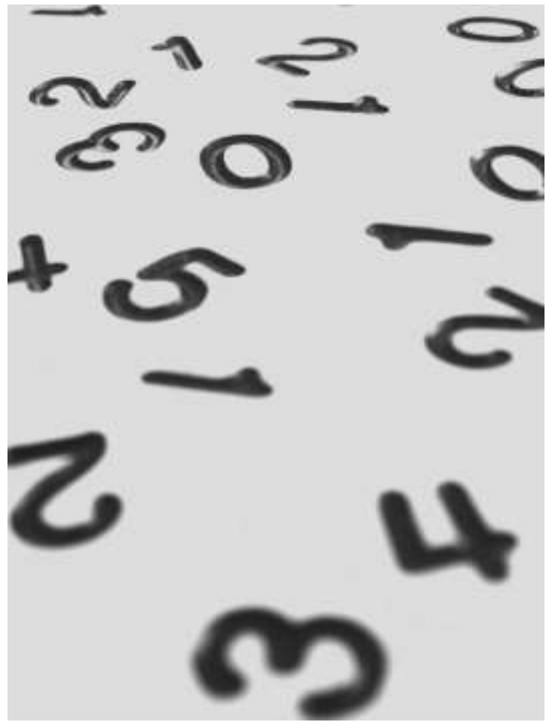
Comprensione

Flessibilità

Controllo

Dalle Indicazioni Nazionali per i Licei:

Il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico



INVALSI

Vedere calcoli aritmetici con *occhio algebrico*
Risonanze tra aritmetica e algebra

$$243 \cdot 15$$

INVALSI

Vedere calcoli aritmetici con *occhio algebrico*
Risonanze tra aritmetica e algebra

$$243 \cdot 15$$

$$(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot (1 \cdot 10 + 5)$$

Vedere calcoli aritmetici con *occhio algebrico*
Risonanze tra aritmetica e algebra

$$243 \cdot 15$$

$$(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot (1 \cdot 10 + 5)$$

$$(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot (1 \cdot 10) + (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot 5$$

INVALSI

Vedere calcoli aritmetici con *occhio algebrico*
Risonanze tra aritmetica e algebra

$$243 \cdot 15$$

$$(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot (1 \cdot 10 + 5)$$

$$(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot (1 \cdot 10) + (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot 5$$

$$2 \cdot 10^2 \cdot (1 \cdot 10) + 4 \cdot 10 \cdot (1 \cdot 10) + 3 \cdot (1 \cdot 10) + 2 \cdot 10^2 \cdot 5 + 4 \cdot 10 \cdot 5 + 3 \cdot 5$$

Vedere calcoli aritmetici con *occhio algebrico*

Risonanze tra aritmetica e algebra

$$243 \cdot 15$$

$$(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot (1 \cdot 10 + 5)$$

$$(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot (1 \cdot 10) + (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot 5$$

$$2 \cdot 10^2 \cdot (1 \cdot 10) + 4 \cdot 10 \cdot (1 \cdot 10) + 3 \cdot (1 \cdot 10) + 2 \cdot 10^2 \cdot 5 + 4 \cdot 10 \cdot 5 + 3 \cdot 5$$

$$2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 10 \cdot 10^2 + 20 \cdot 10 + 15$$

Vedere calcoli aritmetici con *occhio algebrico*
Risonanze tra aritmetica e algebra

$$243 \cdot 15$$

$$(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot (1 \cdot 10 + 5)$$

$$(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot (1 \cdot 10) + (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot 5$$

$$2 \cdot 10^2 \cdot (1 \cdot 10) + 4 \cdot 10 \cdot (1 \cdot 10) + 3 \cdot (1 \cdot 10) + 2 \cdot 10^2 \cdot 5 + 4 \cdot 10 \cdot 5 + 3 \cdot 5$$

$$2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 10 \cdot 10^2 + 20 \cdot 10 + 15$$

$$2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 5$$

INVALSI

Vedere calcoli aritmetici con *occhio algebrico*
Risonanze tra aritmetica e algebra

$$243 \cdot 15$$

$$(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot (1 \cdot 10 + 5)$$

$$(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot (1 \cdot 10) + (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot 5$$

$$2 \cdot 10^2 \cdot (1 \cdot 10) + 4 \cdot 10 \cdot (1 \cdot 10) + 3 \cdot (1 \cdot 10) + 2 \cdot 10^2 \cdot 5 + 4 \cdot 10 \cdot 5 + 3 \cdot 5$$

$$2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 10 \cdot 10^2 + 20 \cdot 10 + 15$$

$$2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 5$$

$$3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5 = 3645$$

Vedere calcoli aritmetici con *occhio algebrico*
Risonanze tra aritmetica e algebra

$$243 \cdot 15$$

$$(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot (1 \cdot 10 + 5)$$

$$(2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot (1 \cdot 10) + (2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 3) \cdot 5$$

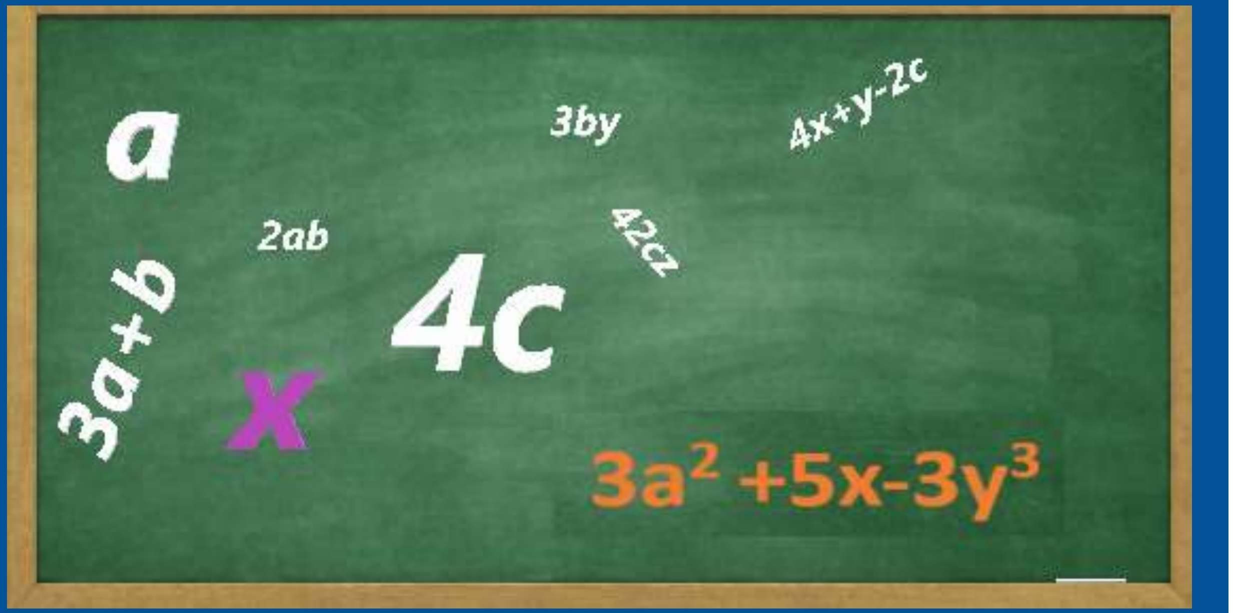
$$2 \cdot 10^2 \cdot (1 \cdot 10) + 4 \cdot 10 \cdot (1 \cdot 10) + 3 \cdot (1 \cdot 10) + 2 \cdot 10^2 \cdot 5 + 4 \cdot 10 \cdot 5 + 3 \cdot 5$$

$$2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 10 \cdot 10^2 + 20 \cdot 10 + 15$$

$$2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 5$$

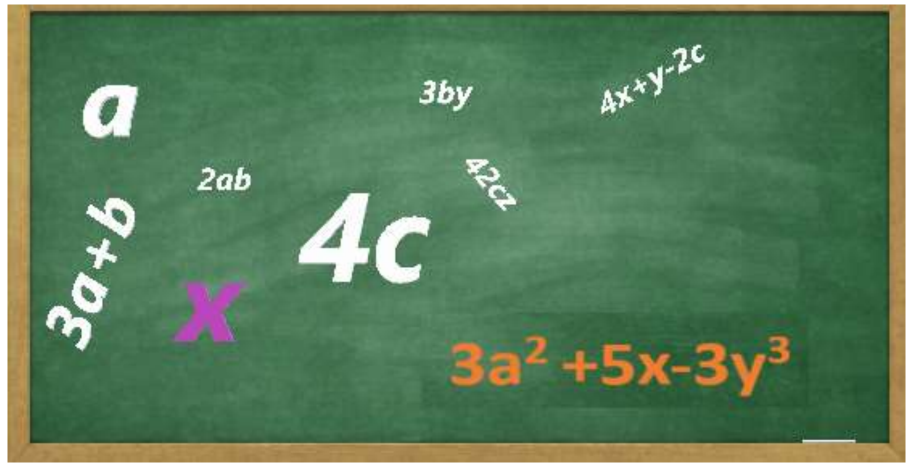
$$3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5 = 3645$$

$$(2a^2 + 4a + 3) \cdot (a + 5) = 2a^3 + 10a^2 + 4a^2 + 20a + 3a + 15 =$$
$$= 2a^3 + 14a^2 + 23a + 15$$



Monomi — espressioni algebriche formate da numeri e lettere legate dalla sola operazione di moltiplicazione

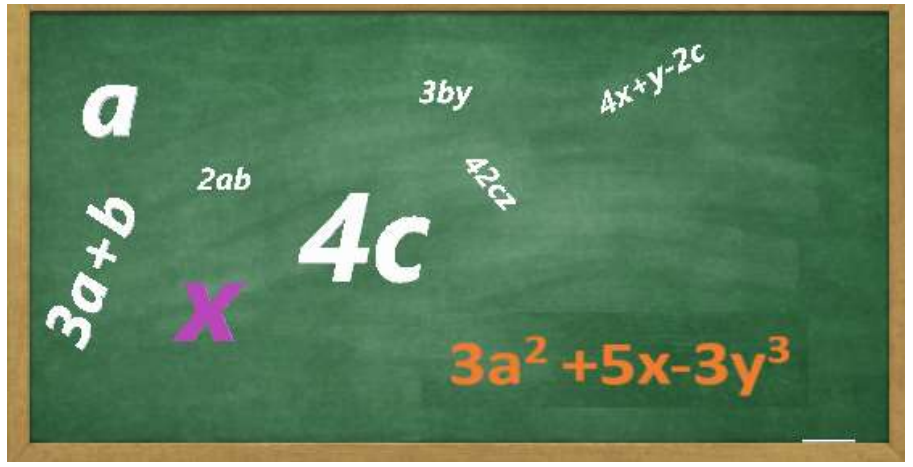
Polinomi — somme algebriche di più monomi



Monomi: espressioni algebriche formate da numeri e lettere legate dalla sola operazione di moltiplicazione

Polinomi: somme algebriche di più monomi

Quali criticità?
2 è un monomio? Perché?
***x* è un polinomio? Perché?**

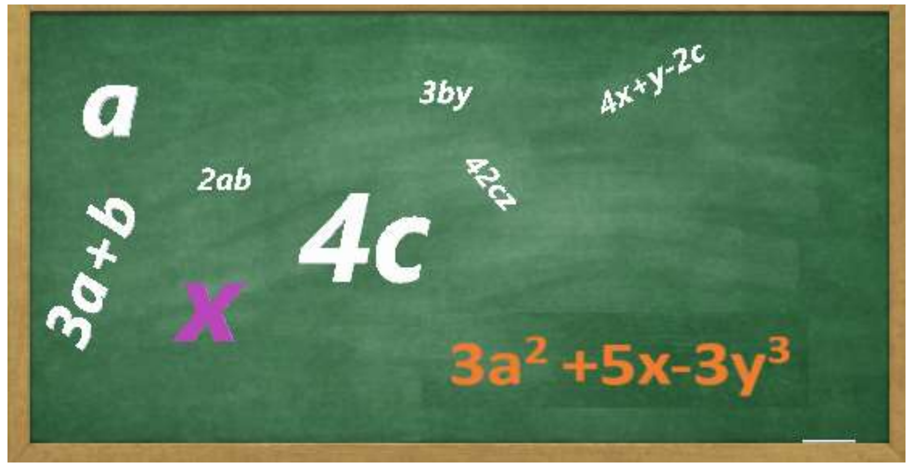


Definizione induttiva di monomio

Regola 1. (di base)
Numeri e lettere sono monomi

Regola 2. (di chiusura rispetto alla moltiplicazione)
Moltiplicazioni di monomi sono monomi

Regola 3. (di esclusione)
Nient’altro è un monomio

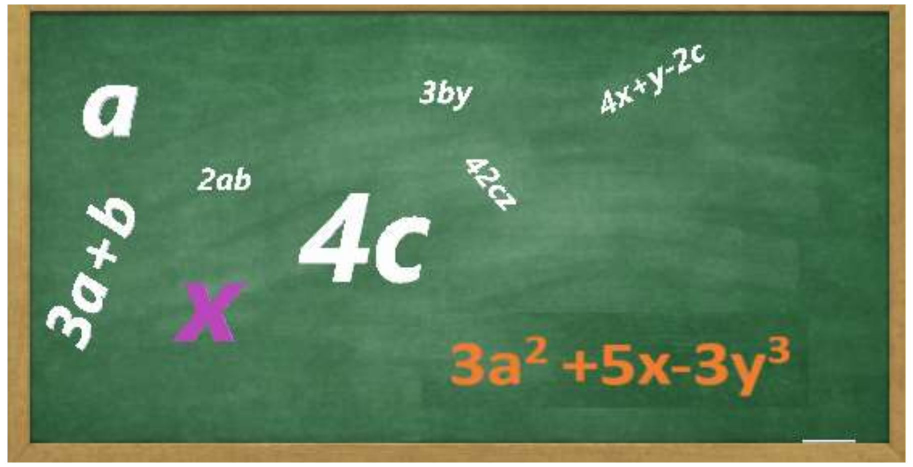


Definizione induttiva di polinomio successiva a quella di monomio

Regola 1. (di base)
I monomi sono polinomi

Regola 2. (di chiusura rispetto all'addizione e alla moltiplicazione)
Addizioni e moltiplicazioni di polinomi sono polinomi

Regola 3. (di esclusione)
Nient'altro è un polinomio

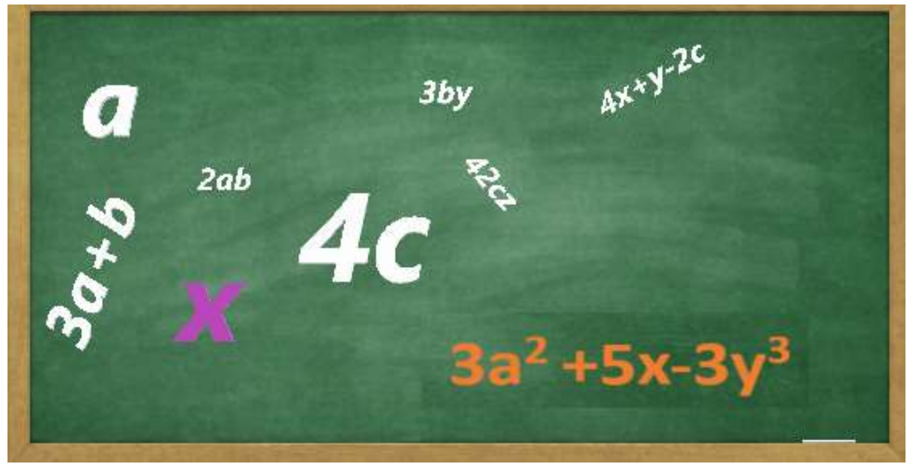


Definizione induttiva di polinomio

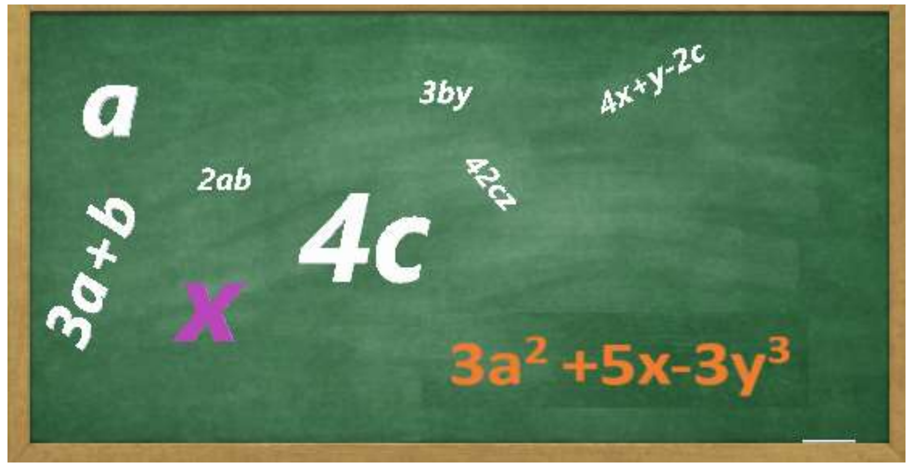
Regola 1. (di base)
Numeri e lettere sono polinomi

Regola 2. (di chiusura rispetto all’addizione e alla moltiplicazione)
Addizioni e moltiplicazioni di polinomi sono polinomi

Regola 3. (di esclusione)
Nient’altro è un polinomio

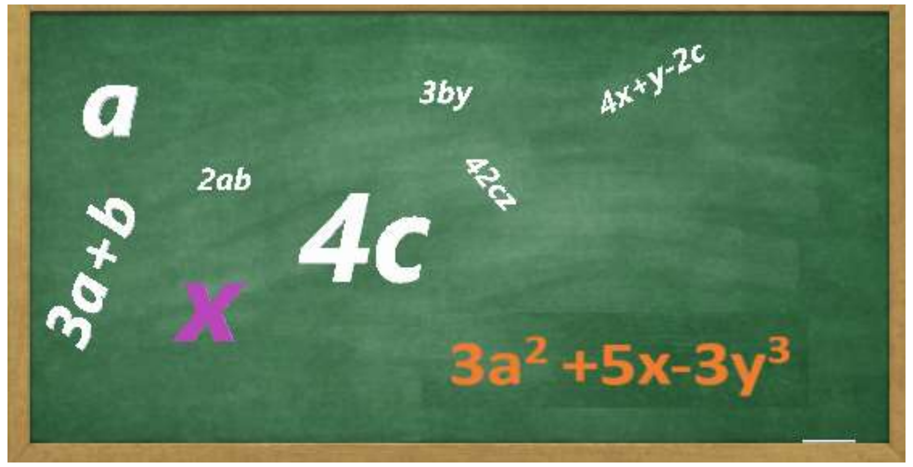


$$
\begin{array}{r}
243\ \cdot \\
15 \\
\hline
1215 \\
243 \\
\hline
3645
\end{array}
$$



$$\begin{array}{r} 243\ \cdot \\ 15 \\ \hline 1215 \\ 243 \\ \hline 3645 \end{array}$$

$$2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 5$$

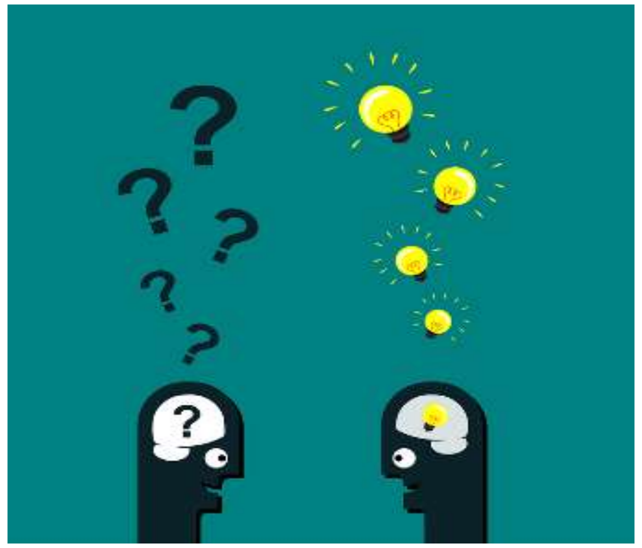


$$
\begin{array}{r}
243\cdot \\
15 \\
\hline
1215 \\
243 \\
\hline
3645
\end{array}
$$

$$2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 5$$

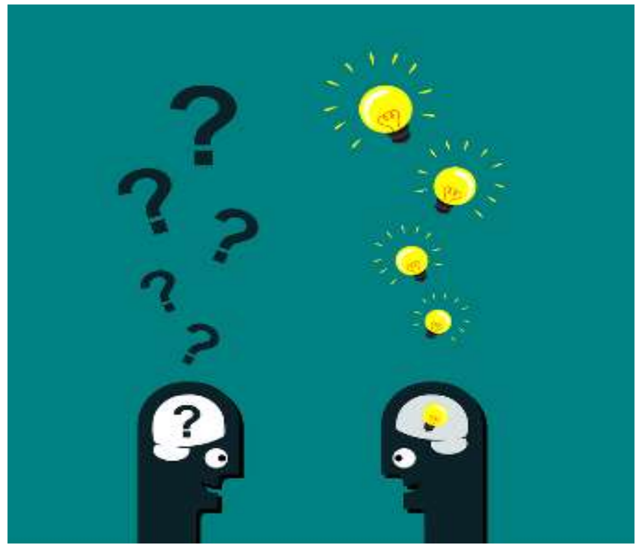
243 · 15	10	5	totali
200	2000	1000	3000
40	400	200	600
3	30	15	45
totali	2430	1215	

Un altro esempio di attività



Individuare un intervallo in cui è compreso il prodotto $3467 \cdot 157$

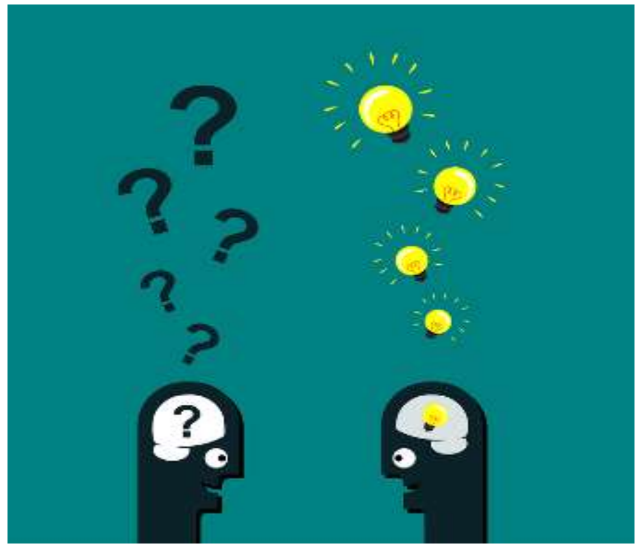
Un altro esempio di attività



Individuare un intervallo in cui è compreso il prodotto $3467 \cdot 157$

***Perché* il risultato è 544319?**

Un altro esempio di attività



Individuare un intervallo in cui è compreso il prodotto $3467 \cdot 157$

Perché **il risultato è 544319?**

Attività di questo tipo rischiano di essere avvertite come inutili e noiose se non si precisano bene obiettivi e motivazioni.

Si sconsiglia di proporle senza un'adeguata preparazione e presentazione.

Si consiglia di chiarire bene che l'obiettivo di queste attività è quello di dare la possibilità di avviare all'uso del linguaggio dell'algebra, che pone molti problemi a tanti studenti, come testimoniano i risultati delle prove INVALSI, e che è fondamentale e imprescindibile per l'acquisizione di conoscenze matematiche avanzate.

Altre attività relative a espressioni aritmetiche che risultano particolarmente semplici se viste con *occhio algebrico*

Partiamo da un «prodotto notevole», per esempio da

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2\ -b^2$$

$$a\cdot(a+b)-b\cdot(a+b)=a^2+a\cdot b-b\cdot a-b^2=a^2\ -b^2$$

Altre attività relative a espressioni aritmetiche che risultano particolarmente semplici se viste con *occhio algebrico*

Partiamo da un «prodotto notevole», per esempio da

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$$

$$a\cdot(a+b)-b\cdot(a+b)=a^2+a\cdot b-b\cdot a-b^2=a^2-b^2$$

$$1599=1600-1=(40-1)\cdot(40+1)=39\cdot 41$$

$$2451=2500-49=(50-7)\cdot(50+7)=43\cdot 57=43\cdot 19\cdot 3$$

$$9991=10000-9=(100-3)\cdot(100+3)=97\cdot 103$$

Altre attività relative a espressioni aritmetiche che risultano particolarmente semplici se viste con *occhio algebrico*

Partiamo da un «prodotto notevole», per esempio da

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2\ -b^2$$

$$a\cdot(a+b)-b\cdot(a+b)=a^2+a\cdot b-b\cdot a-b^2=a^2\ -b^2$$

$$1599 = 1600 - 1 = (40 - 1)\cdot(40 + 1) = 39\cdot 41$$

$$2451 = 2500 - 49 = (50 - 7)\cdot(50 + 7) = 43\cdot 57 = 43\cdot 19\cdot 3$$

$$9991 = 10000 - 9 = (100 - 3)\cdot(100 + 3) = 97\cdot 103$$

$$1001^2-999^2=(1001-999)\cdot(1001+999)=4000$$

Indicazioni nazionali dei licei *non* scientifici

Lo studente apprenderà gli elementi di base del calcolo letterale, le proprietà dei polinomi e le più semplici operazioni tra di essi. Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un’equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica

INVALSI

Altre attività relative a espressioni aritmetiche che risultano particolarmente semplici se viste con *occhio algebrico*

$$\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{16}\right)^2\left(\frac{15}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{16}\right)\cdot\left[\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{16}\right)\left(\frac{15}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]-\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{16}\right)^2$$

Altre attività relative a espressioni aritmetiche che risultano particolarmente semplici se viste con *occhio algebrico*

$$\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{16}\right)^2\left(\frac{15}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{16}\right)\cdot\left[\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{16}\right)\left(\frac{15}{3}-\frac{1}{2}\right)\right]-\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{16}\right)^2$$

$a^2x + a(a - ax) - a^2$ che dà come risultato 0

$$a = \left(\frac{1}{17}-\frac{1}{16}\right) \text{ e } x = \left(\frac{15}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

INVALSI

Altre attività: importanza dell'uso del linguaggio algebrico per esprimere proprietà delle operazioni

Come esprimere la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione senza usare alcun simbolo? Quali difficoltà?

GRAZIE …
e al prossimo incontro !

Si ringrazia Valentina Vaccaro per la revisione