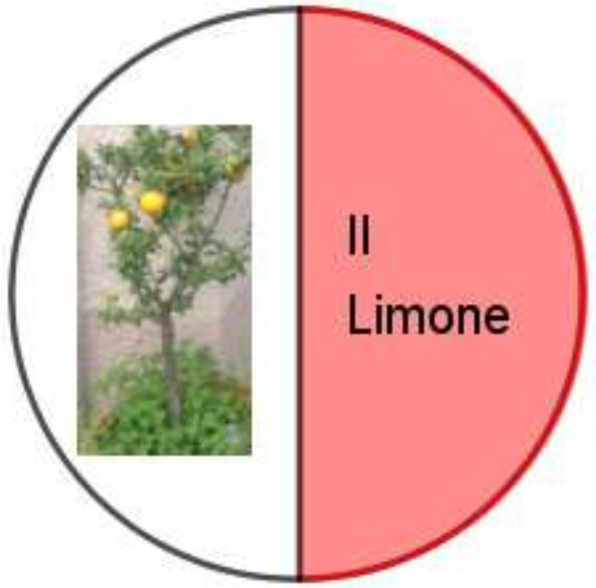
Avvio al calcolo letterale nel primo biennio di scuola secondaria di secondo grado

Algebra per dimostrare

Aurelia Orlandoni
Domingo Paola

https://www.invalsiopen.it/percorsi-strumenti-invalsi/matematica/scuola-secondaria-secondo-grado/

https://www.invalsiopen.it/webinar-invalsi-matematica/



Dal 30% al 20% dei consensi in un anno =
Variazione di 10 punti percentuali, ma =
Calo di circa il 33% del consenso

Variazione percentuale di x_2 rispetto a x_1 $\quad \frac{|x_2 - x_1|}{x_1} \cdot 100$

Variazione percentuale di x_2 rispetto a x_1 $\qquad \dfrac{|x_2 - x_1|}{x_1} \cdot 100$

Numero indice di x_2 rispetto a x_1 $\qquad \dfrac{x_2}{x_1} \cdot 100$

Anno	**Popolazione**
2009	60 045 068 residenti
2010	60 340 328 residenti

Fonte ISTAT

$$\frac{60\,340\,328}{60\,045\,068} \cdot 100 \approx 100.49$$

Relazione tra numeri indice e variazioni percentuali

$$\frac{|x_2 - x_1|}{x_1} \cdot 100 = \frac{x_2}{x_1} \cdot 100 - 100$$

Variazione percentuale di x_2 rispetto a x_1 $\frac{|x_2 - x_1|}{x_1} \cdot 100$

Numero indice di x_2 rispetto a x_1 $\frac{x_2}{x_1} \cdot 100$

Relazione tra numeri indice e variazioni percentuali $\frac{|x_2 - x_1|}{x_1} \cdot 100 = \frac{x_2}{x_1} \cdot 100 - 100$

Dimostrazione:

Sia $x_2 > x_1$

Per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione si ha

$$\frac{x_2 - x_1}{x_1} \cdot 100 = \frac{x_2}{x_1} \cdot 100 - \frac{x_1}{x_1} \cdot 100 = \frac{x_2}{x_1} \cdot 100 - 100$$

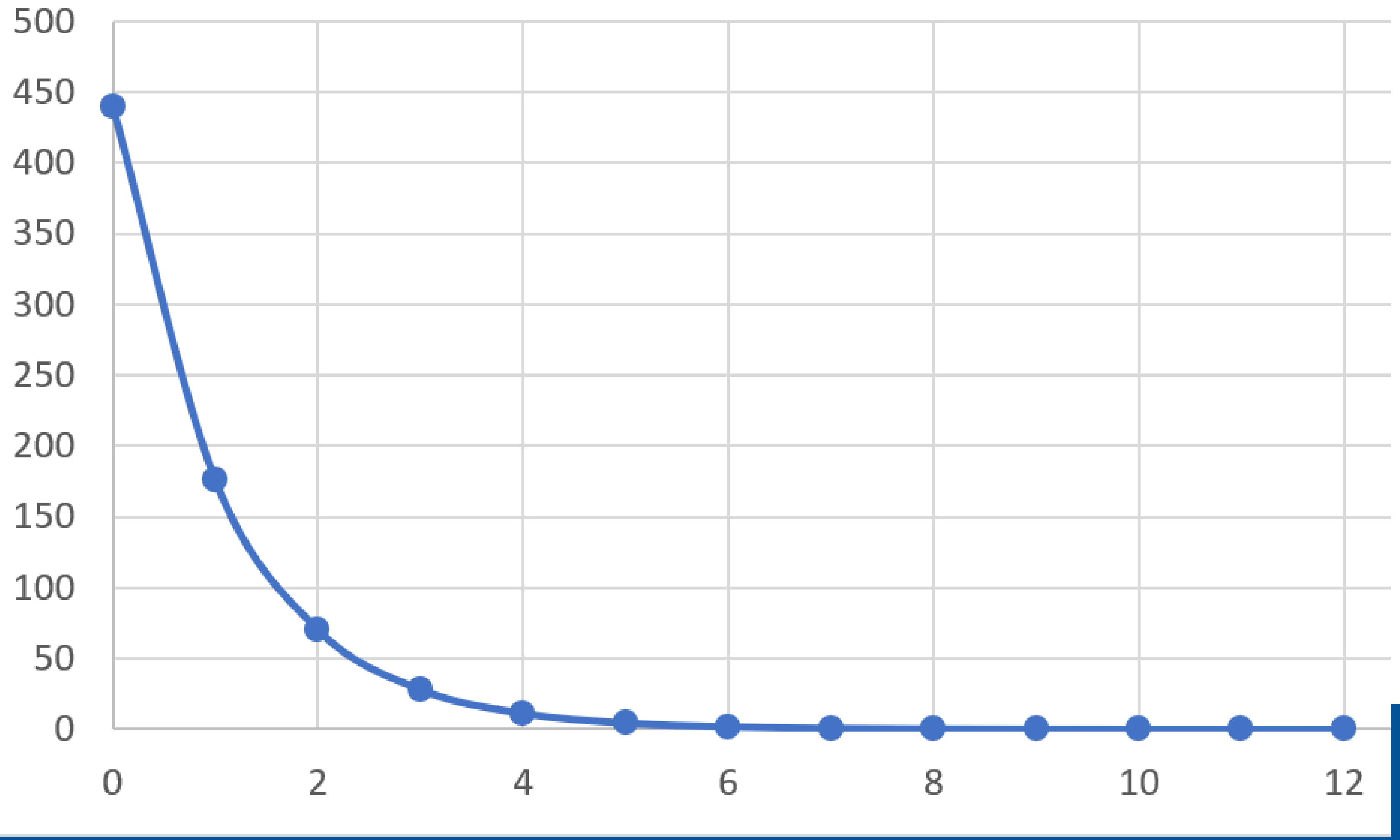
Un esempio di problema in contesto extrascolastico
Applicazione della matematica a situazioni realistiche

Una studentessa assume 440 mg di un farmaco antinfiammatorio.
Si suppone che il farmaco ingerito entri immediatamente nel corpo della studentessa e che ogni 8 ore ne venga smaltito il 60%.

a) Dopo quante ore il farmaco presente nel corpo della studentessa si è ridotto all'1% della quantità assunta?

A	B
0	440
1	176
2	70,4
3	28,16
4	11,264
5	4,5056
6	1,80224

Evoluzione del farmaco nel corpo



Un esempio di problema in contesto extrascolastico
Applicazione della matematica a situazioni realistiche

Le successioni esponenziali

A	B	C	D	E
Variabile indipendente	Valori della successione	Rapporto tra valori successivi	Differenze prime	base
0	1	3	2	3
1	3	3	6	
2	9	3	18	
3	27	3	54	
4	81	3	162	
5	243	3	486	
6	729	3	1458	
7	2187	3	4374	
8	6561	3	13122	

$(3-1)*3^n$

Un esempio di problema in contesto extrascolastico
Applicazione della matematica a situazioni realistiche

Le successioni esponenziali

Il rapporto tra un valore di una successione esponenziale e quello che lo precede è uguale alla base della successione

Dimostrazione:

$$a^{n+1} : a^{n} = a^{n+1-n} = a$$

Un esempio di problema in contesto extrascolastico
Applicazione della matematica a situazioni realistiche

Le successioni esponenziali

Il rapporto tra un valore di una successione esponenziale e quello che lo precede è uguale alla base della successione

Dimostrazione:

$$a^{n+1} : a^n = a^{n+1-n} = a$$

La successione delle differenze prime di una successione esponenziale a^n **è una successione esponenziale del tipo** $\mathrm{k} \cdot a^n$ **con** $\mathrm{k} = a - 1$

Dimostrazione:

$$a^{n+1} - a^n = a^n \cdot (a - 1)$$

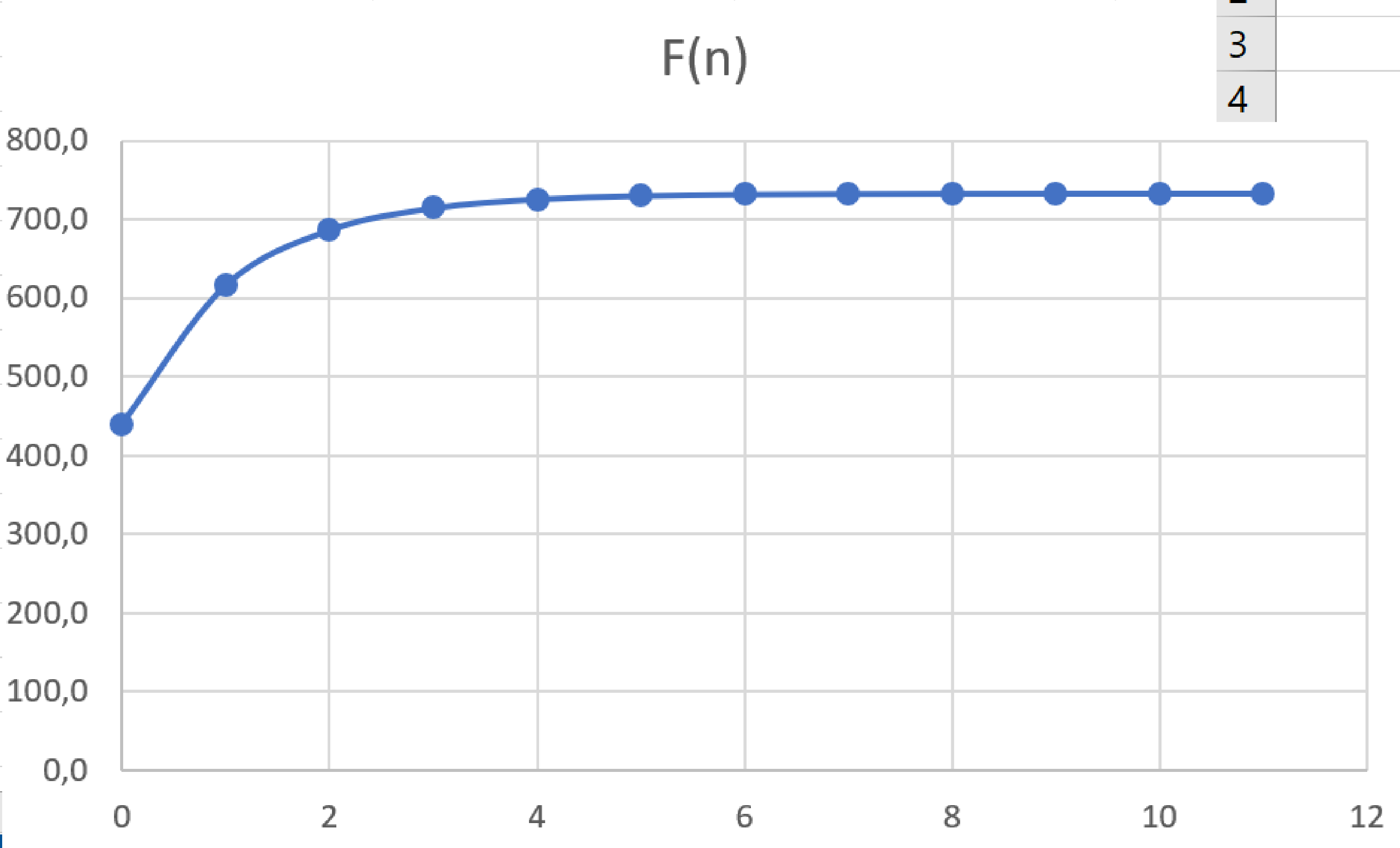
Un esempio di problema in contesto extrascolastico
Applicazione della matematica a situazioni realistiche

b) Per curare l'infiammazione, si richiede di assumere la stessa dose di farmaco ogni 8 ore. Se la capacità di smaltire il farmaco rimane inalterata e, cioè, ogni 8 ore ne viene sempre smaltito il 60% della quantità totale presente nel corpo, qual è l'evoluzione della quantità di farmaco presente nel corpo immediatamente dopo ogni assunzione?

http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/concentrazione-di-un-medicinale/

A	B	C	D	E	F	G
n	F(n)	Differenze prime	Differenze seconde	Percentuale di smaltimento	Assunzione iniziale	Successive assunzioni
0	440,0	176,0	-105,6	0,6	440	440
1	616,0	70,4	-42,2			
2	686,4	28,2	-16,9			
3	714,6	11,3	-6,8			
4	725,8	4,5	-2,7			
5	730,3	1,8	-1,1			
6	732,1	0,7	-0,4			
7	732,9	0,3	-0,2			
8	733,1	0,1	-0,1			
9	733,3	0,0	0,0			
10	733,3	0,0	0,0			
11	733,3	0,0	0,0			
12	733,3	0,0	0,0			
13	733,3	0,0	0,0			
14	733,3	0,0	0,0			
15	733,3	0,0	0,0			
16	733,3	0,0	0,0			

Foglio1



B3 =(1-E2)*B2+G2

	A	B	C
1	n	F(n)	Differenze p
2	0	440,0	
3	1	616,0	
4	2	686,4	

Un esempio di problema in contesto extrascolastico
Applicazione della matematica a situazioni realistiche

Se esiste un valore limite x effettivamente raggiunto, dobbiamo avere:

$$0{,}4x + 440 = x$$

cioè

$$0{,}6x = 440$$

Un esempio di problema in contesto extrascolastico
Applicazione della matematica a situazioni realistiche

Se esiste un valore limite x effettivamente raggiunto, dobbiamo avere:

$$0{,}4x + 440 = x$$

cioè

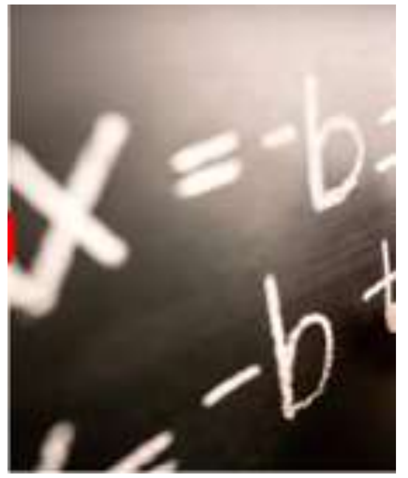
$$0{,}6x = 440$$

$$x = 440 \cdot \frac{10}{6} = \frac{2200}{3}$$

Che dà 733,(3), cioè il valore ottenuto con il foglio di calcolo.

Algebra per dimostrare proposizioni aritmetiche

https://www.invalsiopen.it/percorsi-strumenti-invalsi/matematica/scuola-secondaria-secondo-grado/

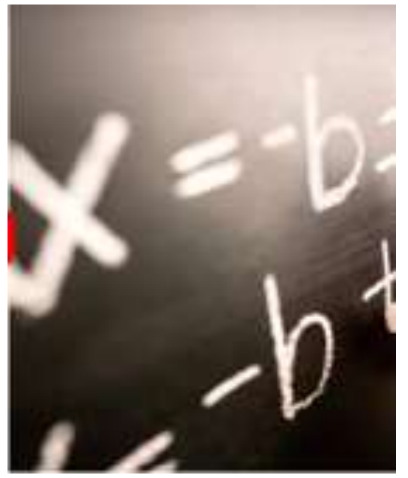


Algebra per dimostrare proposizioni aritmetiche

https://www.invalsiopen.it/percorsi-strumenti-invalsi/matematica/scuola-secondaria-secondo-grado/

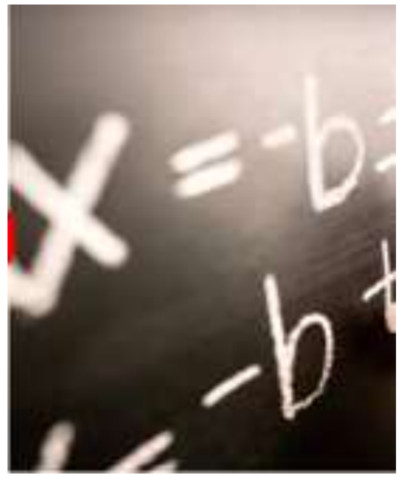
Che cosa si può dire, rispetto alla divisibilità, della somma di due numeri dispari consecutivi?
Giustifica la risposta.

Che cosa si può dire, rispetto alla divisibilità, della somma di due numeri dispari consecutivi?
Giustifica la risposta.



Alcune strategie utilizzate dagli studenti per affrontare il problema:

- **Tentativi numerici, non coerenti con l'ipotesi che si devono considerare due «numeri dispari consecutivi». Per esempio: 5 + 9 = 14**



Che cosa si può dire, rispetto alla divisibilità, della somma di due numeri dispari consecutivi?
Giustifica la risposta.

Alcune strategie utilizzate dagli studenti per affrontare il problema:

- **Tentativi numerici, non coerenti con l’ipotesi che si devono considerare due «numeri dispari consecutivi».**
- **Tentativi numerici e conclusioni non valide in generale, ma legate ai tentativi considerati. Per esempio, 3 + 5 = 8; 7 + 9 = 16; 15 + 17 = 32 → la somma è divisibile per 8, ma in generale non vale.**

Che cosa si può dire, rispetto alla divisibilità, della somma di due numeri dispari consecutivi?
Giustifica la risposta.

Alcune strategie utilizzate dagli studenti per affrontare il problema:

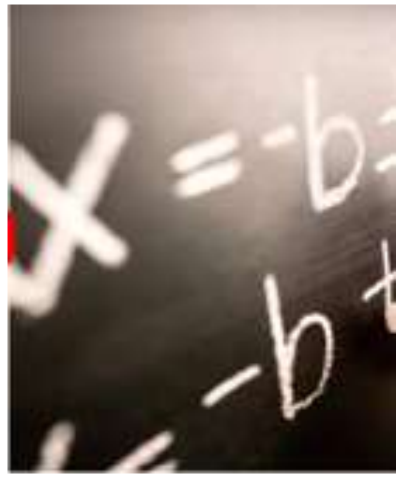
- Tentativi numerici, non coerenti con l’ipotesi che si devono considerare due «numeri dispari consecutivi».
- Tentativi numerici e conclusioni non valide in generale, ma legate ai tentativi considerati.
- **Addizionare due numeri dispari consecutivi è come considerare il doppio del numero pari che è la media aritmetica dei due numeri dispari consecutivi e quindi si ottiene un multiplo di 4.**

Che cosa si può dire, rispetto alla divisibilità, della somma di due numeri dispari consecutivi?
Giustifica la risposta.

Alcune strategie utilizzate dagli studenti per affrontare il problema:

- Tentativi numerici, non coerenti con l'ipotesi che si devono considerare due «numeri dispari consecutivi».
- Tentativi numerici e conclusioni non valide in generale, ma legate ai tentativi considerati.
- Addizionare due numeri dispari consecutivi è come addizionare il doppio del numero pari che è la media aritmetica dei due numeri dispari consecutivi e quindi si ottiene un multiplo di 4.
- **La somma di due numeri dispari consecutivi è pari, perché dispari + dispari fa pari.**

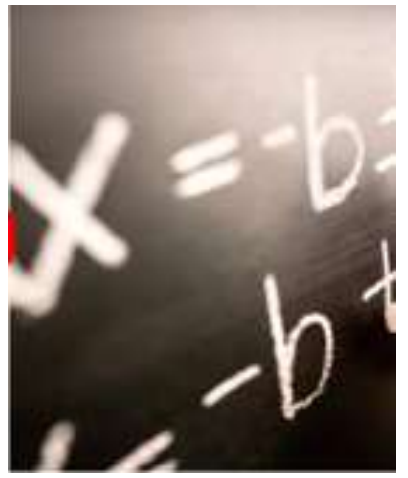
Che cosa si può dire, rispetto alla divisibilità, della somma di due numeri dispari consecutivi?
Giustifica la risposta.



Alcune strategie utilizzate dagli studenti per affrontare il problema:

- Tentativi numerici, non coerenti con l'ipotesi che si devono considerare due «numeri dispari consecutivi».
- Tentativi numerici e conclusioni non valide in generale, ma legate ai tentativi considerati.
- Addizionare due numeri dispari consecutivi è come addizionare il doppio del numero pari che è la media aritmetica dei due numeri dispari consecutivi e quindi si ottiene un multiplo di 4.
- La somma dei due numeri è pari, perché dispari + dispari fa pari.
- Alcuni studenti provano a mettere in formula. Molti di essi, però, ricorrono a formulazioni poco efficaci, per esempio indicano, con d, un numero dispari. Alcuni poi indicano il consecutivo di d con $d + 1$; altri, più correttamente, con $d + 2$. Anche i pochi che poi passano a scrivere $d + d + 2 = 2d + 2 = 2(d+1)$ concludono che si ottiene un numero pari.

Che cosa si può dire, rispetto alla divisibilità, della somma di due numeri dispari consecutivi?
Giustifica la risposta.



Alcune strategie utilizzate dagli studenti per affrontare il problema:

- Tentativi numerici, non coerenti con l'ipotesi che si devono considerare due «numeri dispari consecutivi».
- Tentativi numerici e conclusioni non valide in generale, ma legate ai tentativi considerati.
- Addizionare due numeri dispari consecutivi è come addizionare il doppio del numero pari che è la media aritmetica dei due numeri dispari consecutivi e quindi si ottiene un multiplo di 4.
- La somma dei due numeri è pari, perché dispari + dispari fa pari.
- Alcuni studenti provano a mettere in formula. Molti di essi, però, ricorrono a formulazioni poco efficaci, per esempio indicano, con d, un numero dispari. Alcuni poi indicano il consecutivo di d con $d + 1$; altri, più correttamente, con $d + 2$. Anche i pochi che poi passano a scrivere $d + d + 2 = 2d + 2 = 2(d+1)$ concludono che si ottiene un numero pari.
- Pochissimi scrivono $2n + 1 + 2n + 3 = 4n + 4 = 4(n +1)$ e quindi concludono che si ottiene un multiplo di 4.

GRAZIE …
e al prossimo incontro !

Si ringrazia Valentina Vaccaro per la revisione