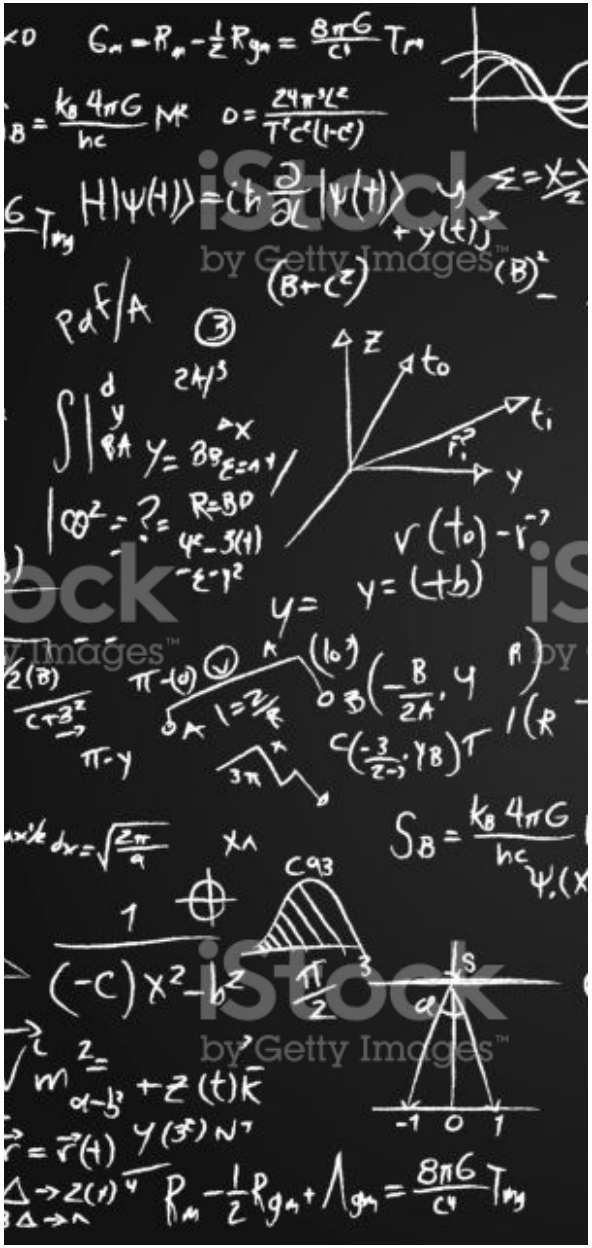
Lettere e simboli: un primo approccio

Scuola secondaria di primo grado

Stefania Pozio – ricercatrice INVALSI



❑ Traguardi per lo sviluppo delle competenze

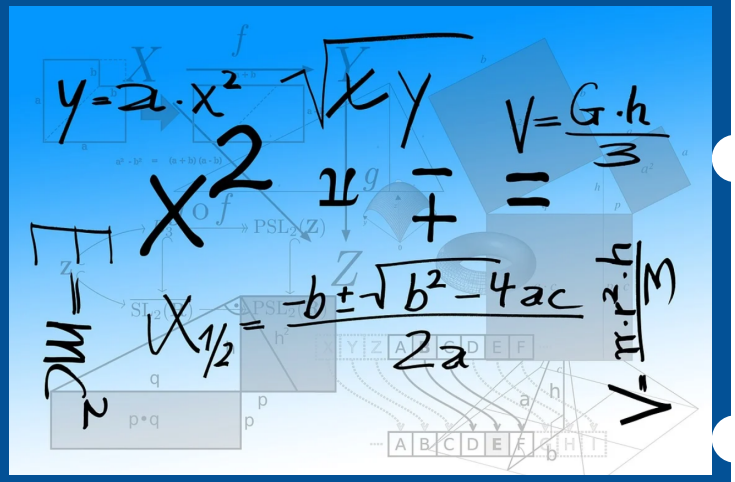
Utilizza e interpreta il linguaggio matematico e ne coglie il rapporto con il linguaggio naturale

❑ Obiettivi di apprendimento

Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà

Dalle Indicazioni nazionali

PREMESSA

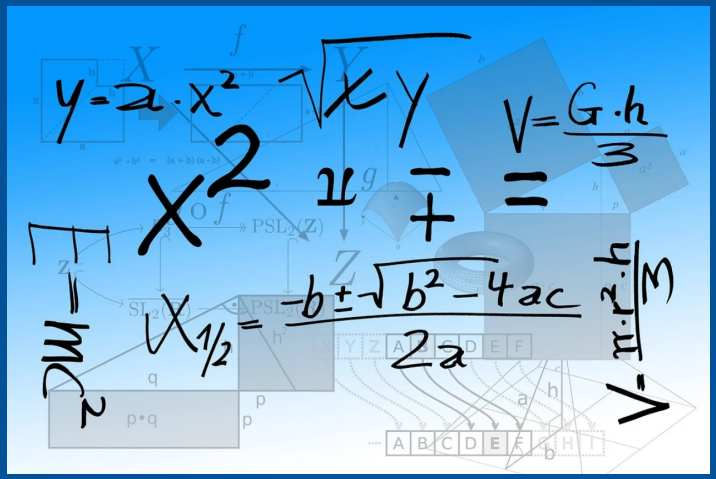


Qui viene proposta un'attività per introdurre l'uso delle lettere agli studenti della scuola secondaria di primo grado prima di affrontare il calcolo letterale

Quest'attività non vuole essere assolutamente esaustiva, vuole solo fornire alcuni spunti per possibili attività didattiche da svolgere con gli studenti

Questa attività nasce dalla consapevolezza che spesso, in particolare sui libri di testo, l'uso delle lettere viene introdotto in modo repentino, senza prima una riflessione sul diverso significato che esse possono avere

Attività di introduzione all'algebra ce ne sono diverse. Le principali sono quelle relative al progetto Ar.Al (http://www.progettoaral.it/) e quelle proposte dal progetto M@t.abel (http://www.scuolavalore.indire.it/superguida/matabel/)



Il pensiero algebrico non si sviluppa spontaneamente (Stacey and Mac Gregor, 1997).

Diversi studi rilevano che la maggior parte degli studenti fino a 15 anni ha difficoltà a interpretare le lettere come incognite o come variabili.

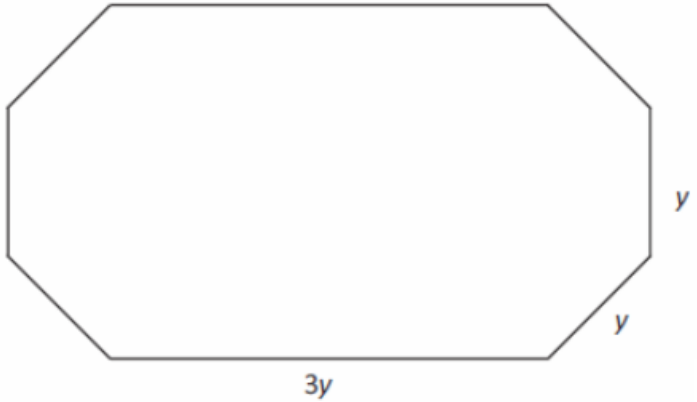
Spesso essi ignorano le lettere, le sostituiscono con valori numerici o le considerano come abbreviazioni di nomi.

L'impulso per i calcoli impedisce agli studenti di cercare e selezionare un'incognita adatta e tentare un approccio algebrico.

Ci sono evidenze che tali difficoltà possono essere dovute a diverse cause e vedremo qui quali.

Interferenze tra nuovi e vecchi apprendimenti in matematica
(imparano le potenze e confondono l'addizione ripetuta, cioè la moltiplicazione, con la moltiplicazione ripetuta, cioè le potenze. Per cui 3x diventa x^3 o viceversa)

D20. **Un listello di legno di 60 cm è stato tagliato in pezzi di lunghezza *y* e pezzi di lunghezza 3*y* per costruire la cornice mostrata in figura.**



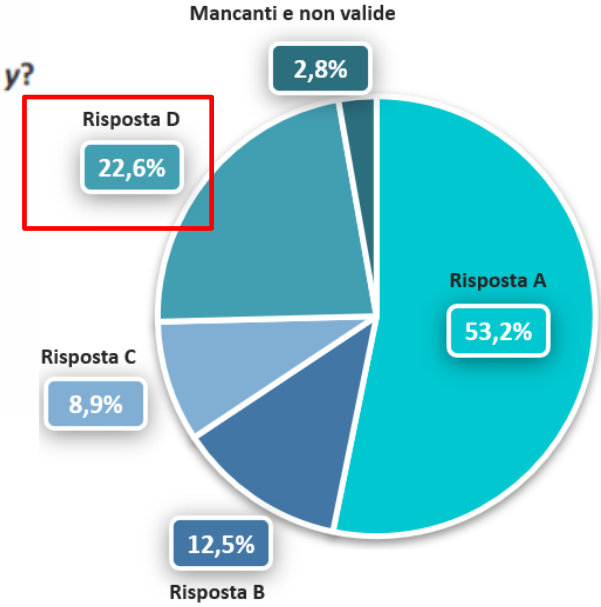
Quale delle seguenti equazioni permette di calcolare la lunghezza *y*?

A. $12y = 60$

B. $12y = 60y$

C. $5y = 60$

D. $3y^3 = 60$



Analogie con sistemi di simboli usati nella vita quotidiana, in altre parti della matematica o in altre materie scolastiche.

D17. **L'insegnante dice: "Prendiamo un numero naturale che indichiamo con *n*. Cosa si può dire del risultato di *n(n-1)*? È sempre pari, oppure sempre dispari, oppure può essere qualche volta pari e qualche volta dispari?". Alcuni studenti rispondono in questo modo:**

Roberto: "Può essere sia pari sia dispari, perché *n* è un numero qualsiasi"

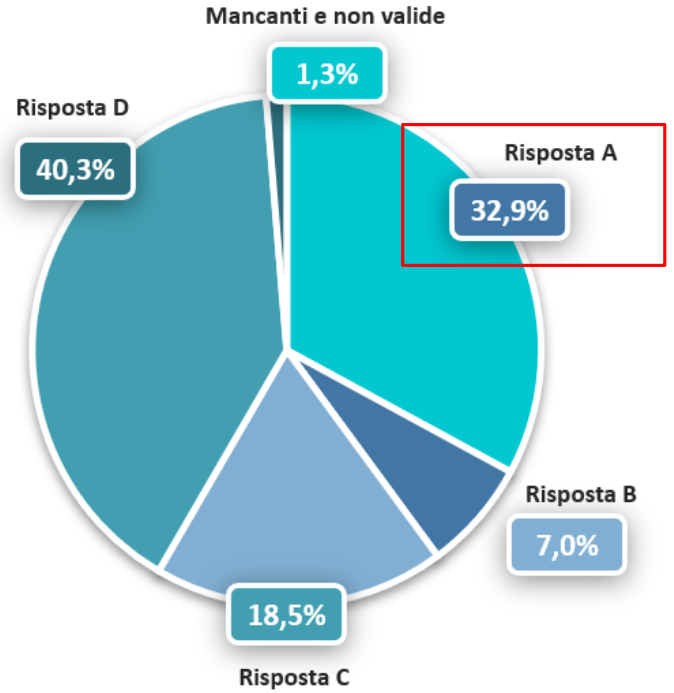
Angela: "È sempre dispari, perché *n-1* indica un numero dispari"

Ilaria: "È sempre pari, perché 3×(3-1) fa 6, che è pari"

Chiara: "È sempre pari perché *n* e *(n-1)* sono numeri consecutivi e quindi uno dei due deve essere pari"

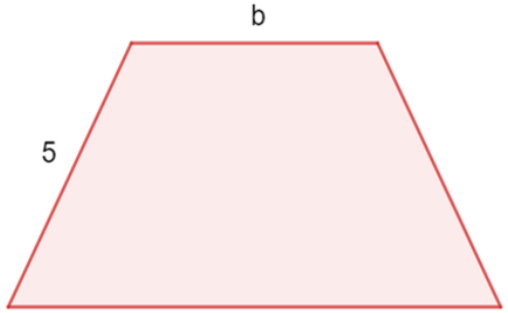
Chi ha ragione e fornisce la spiegazione corretta?

- ☐ A. Roberto
- ☐ B. Angela
- ☐ C. Ilaria
- ☐ D. Chiara



Analogie con sistemi di simboli usati nella vita quotidiana, in altre parti della matematica o in altre materie scolastiche

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore.



Scrivi una formula che esprima il perimetro *p* del trapezio in funzione di *b*.

Digita la risposta alla domanda.

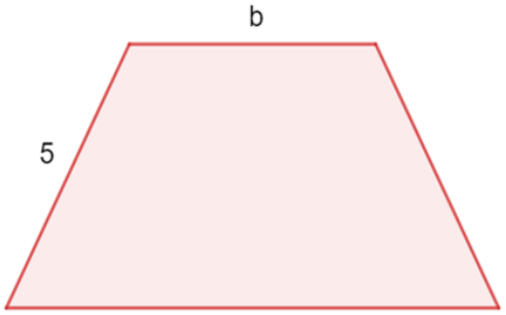
Risposta: $p =$ ☐

Alcuni tipi di risposte errate

- $b+(b*2)+(l*2)$
- $b+2b+a+a$
- $bx3+2l$
- $b+(b*2)+(d*2)$

Idea che i problemi si risolvono con i calcoli

Nel trapezio isoscele in figura la base maggiore è doppia della minore.



Scrivi una formula che esprima il perimetro *p* del trapezio in funzione di *b*.

Digita la risposta alla domanda.

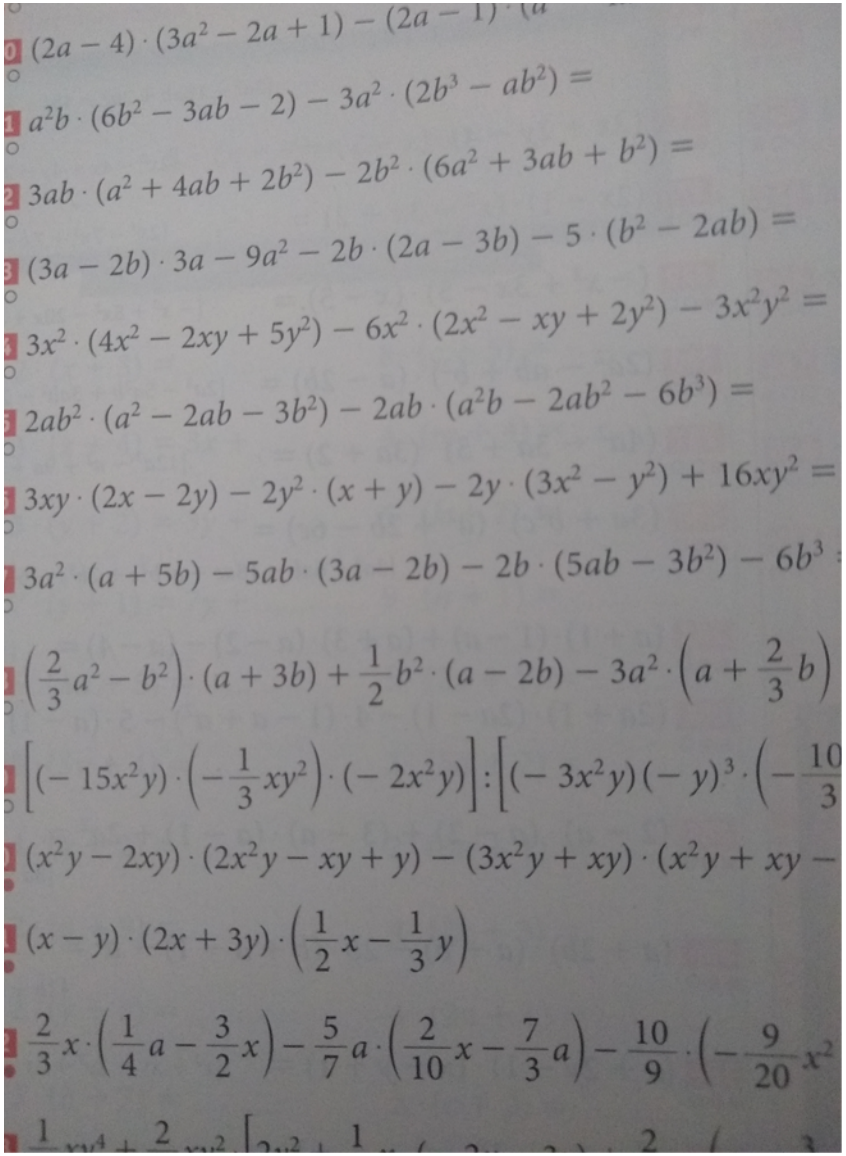
Risposta: *p* = ☐

Alcuni tipi di risposte errate

- *5 + 5 + 5 + 10 = 25*
- *8 + 4 + 10 = 22*
- *[6+(6*2)]+(5*2)*
- *14+7+5+5=31*

Materiale didattico mal progettato e fuorviante

Da un libro di testo



Quali conseguenze dall'utilizzo di materiale didattico mal progettato e fuorviante?

D14. **La somma di due numeri naturali *a* e *b* è pari. Se aggiungo 1 a entrambi i numeri, come sarà ora la somma? Scegli una delle due risposte e completa la frase.**

☐ La somma sarà pari perché .....

.....

.....

.....

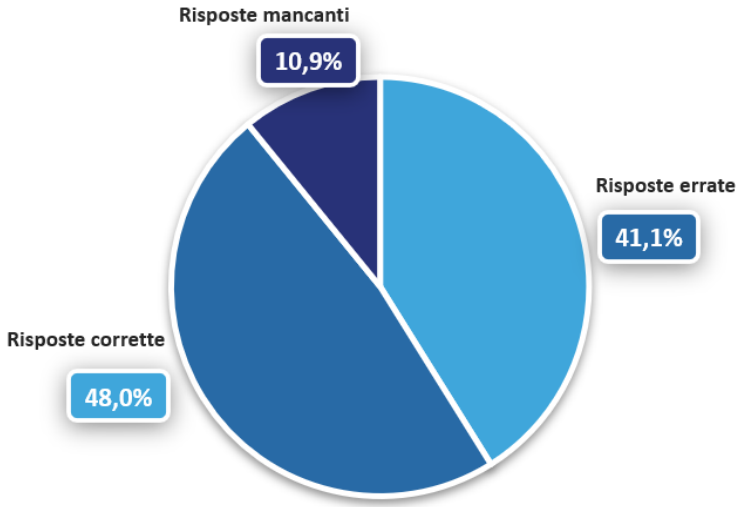
☐ La somma sarà dispari perché .....

.....

.....

.....

Percentuali nazionali



M1408D1400

D14. **La somma di due numeri naturali *a* e *b* è pari. Se aggiungo 1 a entrambi i numeri, come sarà ora la somma? Scegli una delle due risposte e completa la frase.**

C

☒ La somma sarà pari perché 3+3=6 → 4+4=8 ; 5+5=10 → 6+6=12

Perché aggiungo 1 ad entrambi i numeri

in modo che, che siano pari o dispari il

risultato sarà pari.

M1408D1400

D14. **La somma di due numeri naturali *a* e *b* è pari. Se aggiungo 1 a entrambi i numeri, come sarà ora la somma? Scegli una delle due risposte e completa la frase.**

☒ La somma sarà pari perché la somma di due numeri

uguali è sempre pari

3+3=6+1 → 4+4=8

5+5=10

6+6=12

M1408D1400

D6. **La somma di due numeri naturali *a* e *b* è pari. Se aggiungo 1 a entrambi i numeri, come sarà ora la somma? Scegli una delle due risposte e completa la frase.**

E

☒ La somma sarà pari perché se comincia con essere pari e poi aggiungo 1 a entrambi i numeri, tutti e due a e b avranno un numero in più ma saranno sempre uguali e avranno lo stesso risultato finale, quindi è pari

M1408D1400

D6. **La somma di due numeri naturali *a* e *b* è pari. Se aggiungo 1 a entrambi i numeri, come sarà ora la somma? Scegli una delle due risposte e completa la frase.**

E

☒ La somma sarà pari perché se è 3+3=6 aggiungendo

~~a~~ 1 a 3 = 4+4=8 è sempre pari

☐ La somma sarà dispari perché

La difficoltà dei nostri studenti di scrivere una relazione

D14. In Europa, i numeri delle scarpe corrispondono circa ai $\frac{3}{2}$ della lunghezza (in cm) del piede.
Negli USA i numeri delle scarpe sono attribuiti in modo diverso, come si vede dalla tabella che segue:

NUMERI DELLE SCARPE										
Europa (E)	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
USA (U)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

a. Giorgio ha il piede lungo 24 cm. Quale numero di scarpe dovrà acquistare in Italia?

Risposta: .....

b. John porta scarpe numero 7, misura USA. Qual è all'incirca la lunghezza del suo piede?

Risposta: ..... cm

c. Scrivi la relazione che ti permette di passare dal numero di scarpe USA (U) al numero di scarpe europeo (E).

Risposta: E = ...

INVALSI

INVALSI

D14. In Europa, i numeri delle scarpe corrispondono circa ai $\frac{3}{2}$ della lunghezza (in cm) del piede.
Negli USA i numeri delle scarpe sono attribuiti in modo diverso, come si vede dalla tabella che segue:

NUMERI DELLE SCARPE										
Europa (E)	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
USA (U)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

a. Giorgio ha il piede lungo 24 cm. Quale numero di scarpe dovrà acquistare in Italia?

Risposta: .....

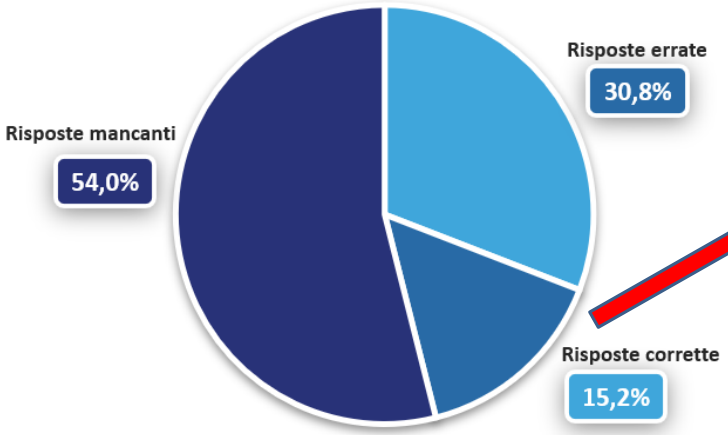
b. John porta scarpe numero 7, misura USA. Qual è all'incirca la lunghezza del suo piede?

Risposta: ..... cm

c. Scrivi la relazione che ti permette di passare dal numero di scarpe USA (U) al numero di scarpe europeo (E).

Risposta: E = ...

Percentuali nazionali



INVALSI

Errori degli studenti

$E = \frac{3}{2} U$

$E = (U \times \frac{2}{3}) \times \frac{3}{2}$

$E = \frac{3}{2} \times$ numero delle scarpe

$E = USA \times \frac{2}{3}$

$E = + 32$

$E = U : 3 \times 2$

D14. In Europa, i numeri delle scarpe corrispondono circa ai $\frac{3}{2}$ della lunghezza (in cm) del piede.
Negli USA i numeri delle scarpe sono attribuiti in modo diverso, come si vede dalla tabella che segue:

NUMERI DELLE SCARPE										
Europa (E)	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
USA (U)	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

a. Giorgio ha il piede lungo 24 cm. Quale numero di scarpe dovrà acquistare in Italia?

Risposta: .....

b. John porta scarpe numero 7, misura USA. Qual è all'incirca la lunghezza del suo piede?

Risposta: ..... cm

c. Scrivi la relazione che ti permette di passare dal numero di scarpe USA (U) al numero di scarpe europeo (E).

Risposta: E = ...

CHE FARE?

INVALSI

Discutete con i vostri studenti

Perché si usano le lettere? Non si potrebbero usare i numeri per qualsiasi cosa?

Se voglio indicare l'altezza di un rettangolo, posso usare una lettera diversa da h?

Pensate delle situazioni matematiche in cui è utile usare le lettere

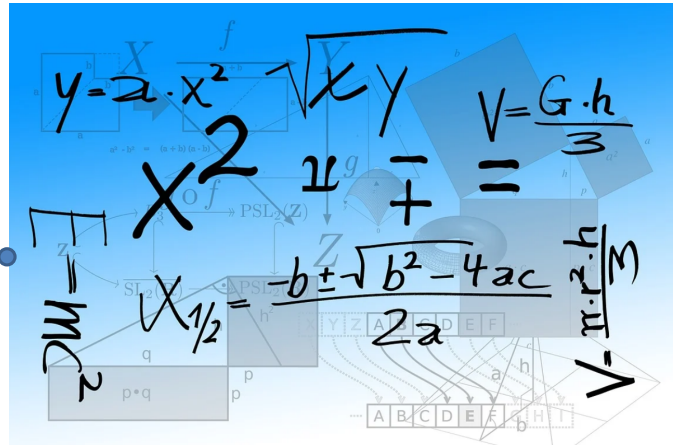
Sarebbe la stessa cosa se si usassero dei simboli (una stellina, un pallino o addirittura una parola) al posto delle lettere?

INVALSI

Noi diamo per scontato che i ragazzi leggano e interpretino i segni come lo facciamo noi

Invece del segno della moltiplicazione, si usa il punto.
Perché?
Perché il segno «per» (x) si potrebbe confondere con la lettera x.
Ad esempio se voglio indicare il triplo di un numero che chiamiamo con x, scrivere 3 x x non andrebbe bene. Quindi utilizziamo il punto come in 3·x o meglio nessun segno come 3x.

Trova le moltiplicazioni in questo disegno



Tutto ciò che a noi sembra banale e scontato, non lo è affatto per gli studenti.

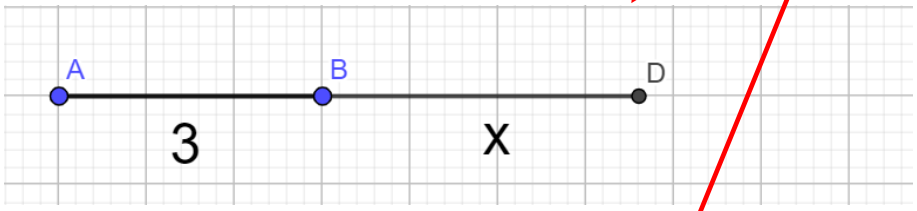
Importanza dei simboli in matematica

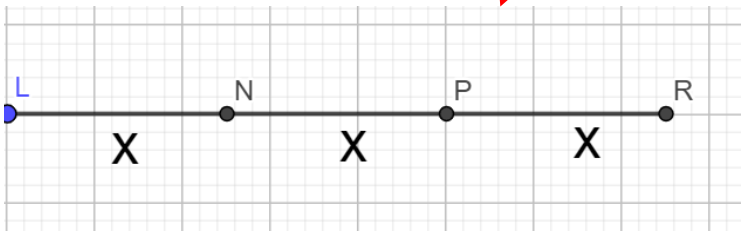
https://www.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-intro-to-algebra/alg-intro-to-variables/v/why-aren-t-we-using-the-multiplication-sign?modal=1

PROPOSTA DI ATTIVITA’

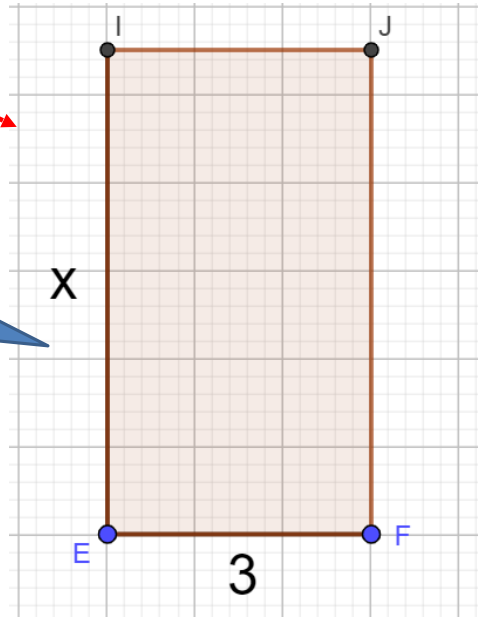
Che differenza c’è quindi tra 3 + x e 3x?
Come tradurresti in forma grafica queste due espressioni?

Il 3 può rappresentare un operatore moltiplicativo oppure una misura





Che cosa otteniamo se facciamo 3 + x o se facciamo 3x?

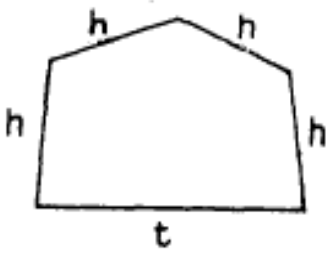


In quanti casi diversi possiamo incontrare le lettere (Kuchemann D., 1981)

- Lettere come valore sconosciuto (incognita)
- Lettere come variabili
- Lettere come etichette
- Lettere a cui non necessariamente si deve attribuire un valore
- Lettere come parametri

INVALSI

Facciamo degli esempi



Per indicare i lati di un poligono. Stessa lettera generalmente vuol dire lato uguale

d

Per indicare un numero dispari

Ora fate voi degli esempi

Lettere come etichette

INVALSI

Facciamo degli esempi

Non c'è bisogno di conoscere il valore di queste lettere per poter rispondere alla domanda

L + M + N = L + P + N

Se L, M, N e P sono numeri, l'uguaglianza è sempre vera, sempre falsa o dipende?

In contesti nei quali si assume che a lettere uguali corrispondono valori uguali, la risposta è dipende

Non c'è bisogno di conoscere il valore di queste lettere per poter rispondere alla domanda

a + b = 35

a + b + 5 = ?

Lettere a cui non necessariamente si deve attribuire un valore

INVALSI

Cosa vuol dire «incognita»?

Facciamo degli esempi

Ho 8 figurine. Quante ne devo acquistare se voglio arrivare a 20?
Scrivi l'espressione che ti permette di calcolare il numero di figurine che devo acquistare. C'è solo un modo per scriverla?
Questa frase nasconde un'incognita? Se sì, qual è?
Quali e quanti valori può assumere questa incognita per rendere vera l'uguaglianza?

$8 + a = 20$
Oppure
$a = 20 - 8$
Oppure
$20 - a = 8$
Sono tutte equivalenti queste espressioni?

Lettere come valore sconosciuto (incognita)

La somma di due numeri naturali è 12. Un numero è minore dell'altro.
Quali sono questi due numeri?
Scrivi le espressioni che ti permettono di trovare i valori dei due numeri.
Che differenza vedete tra questa espressione e quella precedente?
Quanti e quali valori possono assumere questi due numeri per rendere vera l'uguaglianza?

$a + b = 12$
$a < b$ o viceversa
QUINDI
$a = 1 \; e \; b = 11$
$a = 2 \; e \; b = 10$
$a = 3 \; e \; b = 9$
E così via…

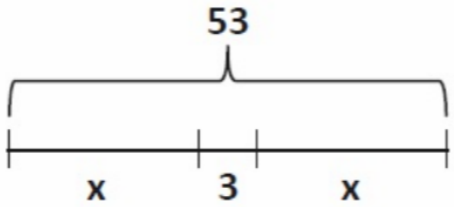
INVALSI

Cosa vuol dire «incognita»?

Fate voi degli esempi di situazioni in cui l'incognita ha un solo valore possibile che rende vera l'uguaglianza e trasformateli in linguaggio matematico

Lettere come valore sconosciuto (incognita)

D25. **Osserva lo schema.**



Quale delle seguenti equazioni può rappresentare lo schema?

A. $3 \cdot 2x = 53$

B. $x + 3x = 53$

C. $2x + 3 = 53$

D. $3 + x^2 = 53$

INVALSI

Cosa vuol dire «variabile»?

Che differenza c'è tra queste situazioni e quelle descritte in precedenza?

Quando Luigi lavora come cameriere in un bar guadagna 15 euro l'ora più le mance.

Scrivi l'espressione che indica quanto guadagna Luigi in un'ora lavorando nel bar.

In un negozio fanno i saldi e tutti gli articoli sono scontati del 40%.

Scrivi l'espressione che ti permette di calcolare il prezzo di un qualsiasi articolo che tu compri in quel negozio.

Lettere come variabili

INVALSI

Dal linguaggio naturale al linguaggio matematico

Facciamo degli esempi

Lettere come variabili

D8. **A ogni compleanno, la nonna regala a Mario una somma di denaro in euro uguale a 5 volte l'età che compie. Quest'anno, oltre al solito regalo, la nonna dà a Mario 10 euro in più. Se *N* è il numero di anni che Mario compie quest'anno, quale delle seguenti formule esprime la somma ricevuta da Mario?**

A. $10N + 5$

B. $5N + 10$

C. $N + 10$

D. $N + 15$

INVALSI

Dal linguaggio naturale al linguaggio matematico

Facciamo degli esempi

$g = a - 8$

Aldo è 8 cm più alto di Giovanni. Indica con *g* l'altezza di Giovanni.
In che modo puoi esprimere l'altezza di Giovanni (*g*) rispetto a quella di Aldo (*a*)?
Utilizza il linguaggio matematico per scrivere la relazione tra l'altezza di Giovanni e quella di Aldo.

$E = 32 - x$

Elena pesa *x* chilogrammi meno di Giacomo. Giacomo pesa 32 kg.
In che modo puoi esprimere il peso di Elena rispetto a quello di Giacomo?
Utilizza il linguaggio matematico per scrivere la relazione tra il peso di Elena e quello di Giacomo.

Relazioni tra grandezze espresse utilizzando le lettere

INVALSI

Trasforma le seguenti frasi scritte in linguaggio naturale in espressioni algebriche o viceversa

Susanna pesa cinque chili meno di Giorgia.
Indica Susanna con *a* e Giorgia con *b*

In un campeggio ci sono 83 persone. I maschi sono 23 più delle femmine. Quante femmine in tutto ci sono nel campeggio?

Giulio ha 5 anni più di Pietro.
Indica Giulio con *a* e Pietro con *b*

Aggiungi 7 a un numero qualsiasi e poi moltiplica per 5

$x - 72 = y$

$c = 4d$

$a = b + 9$

Relazioni tra grandezze espresse utilizzando le lettere

A che cosa serve? La ricerca del senso…

Scrivi una espressione che indica il triplo di un numero qualsiasi

Indicando con n un numero naturale è maggiore 2n o 2 + n?

Indicando con n un numero naturale qualsiasi, scrivi una formula che ti dà un numero pari

Indicando con n un numero naturale qualsiasi, scrivi una formula che ti dà un numero dispari

Scrivi due numeri consecutivi

INVALSI

L’algebra ci permette di generalizzare

INVALSI

Esempi dalle prove INVALSI

D22. Se *n* è un numero naturale, allora il numero n · (n + 2)

A. ☐ è sempre dispari

B. ☐ è sempre pari — 23,2%

C. ☐ è dispari se *n* è pari

D. ☐ è dispari se *n* è dispari — 59,3%

L'algebra ci permette di generalizzare

D7. *a* è un numero dispari maggiore di 3. Quale delle seguenti espressioni rappresenta il numero dispari successivo ad *a*?

A. ☐ $a + 1$

B. ☐ $2a + 1$ — 14%

C. ☐ $2a - 1$

D. ☐ $a + 2$ — 71%

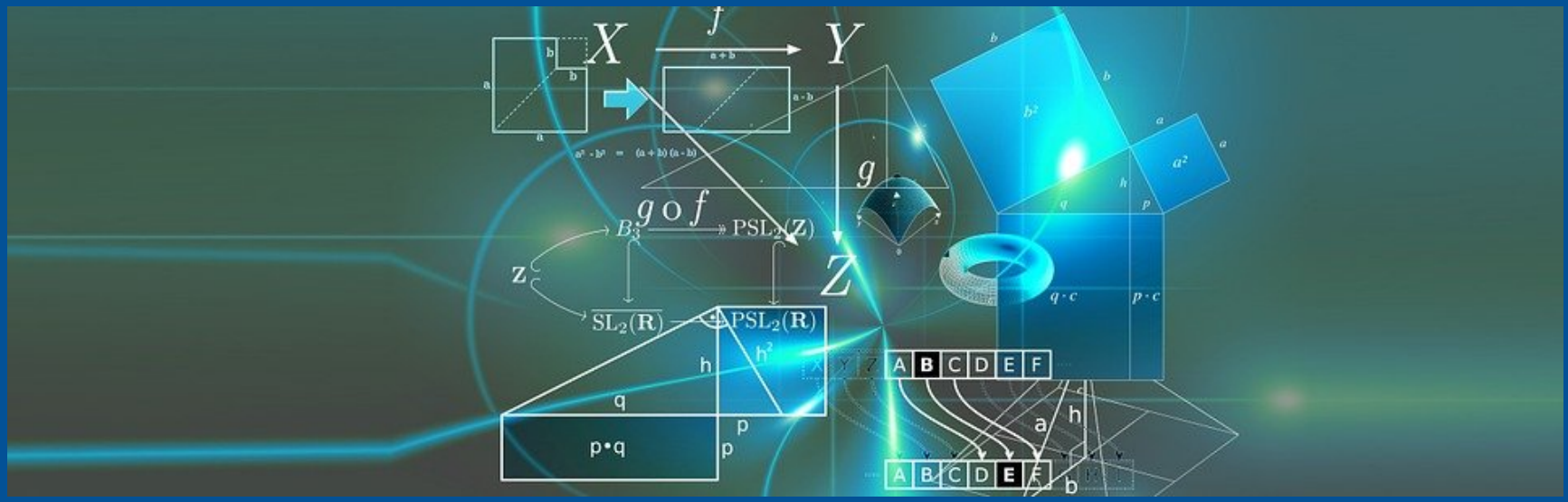
D4. Se *n* è un numero naturale qualsiasi, quale procedimento devi seguire per essere sicuro di ottenere sempre un numero dispari?

☐ A. $n-1$

☐ B. $n+1$

☐ C. $n \times 2+1$ — 86,8%

☐ D. $\frac{n}{2}+1$



Grazie per l'attenzione

INVALSI

INVALSIopen
SITO UFFICIALE AREA PROVE NAZIONALI