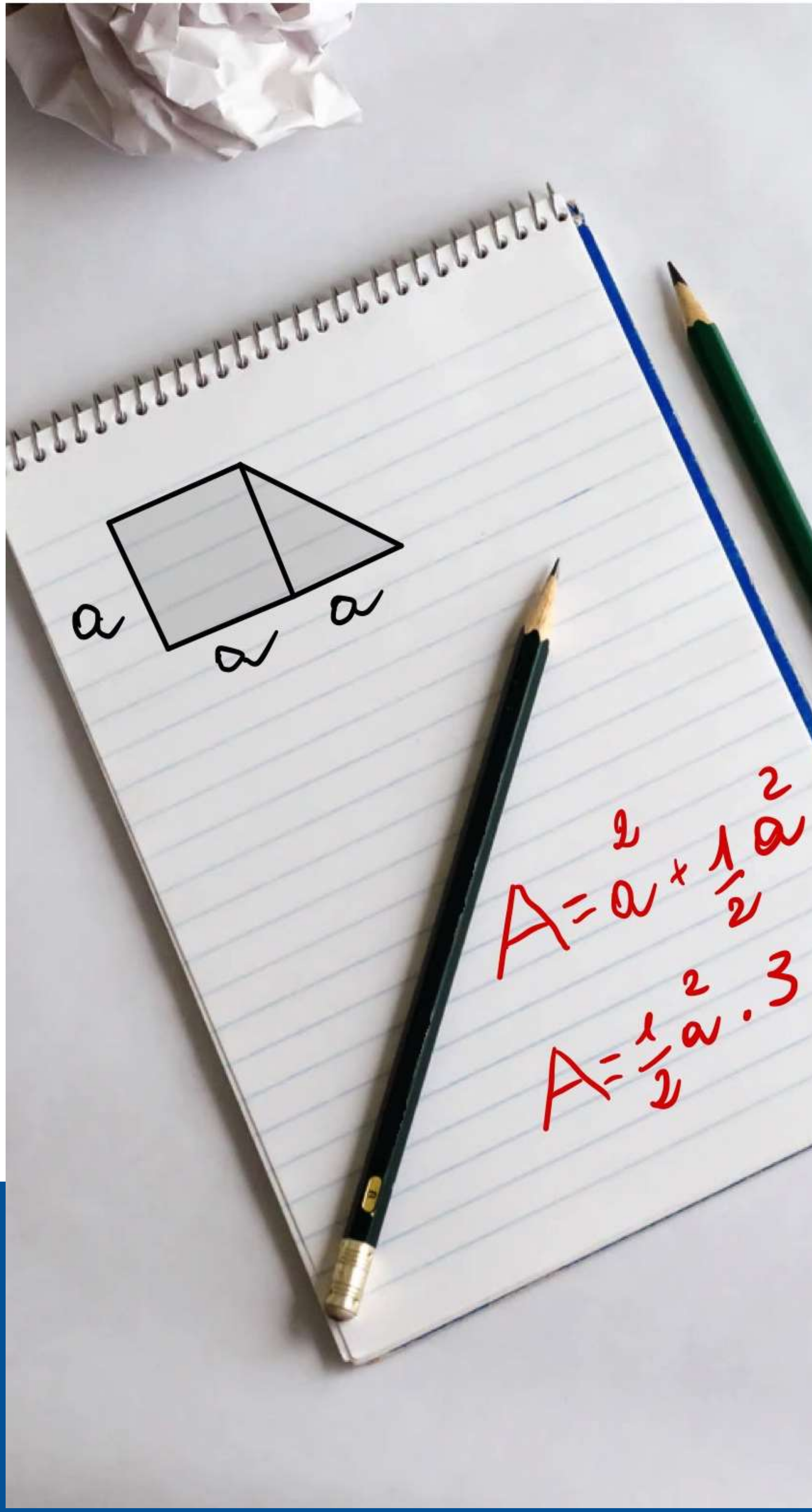
ESPRESSIONI ALGEBRICHE IN CONTESTO GEOMETRICO: un percorso didattico

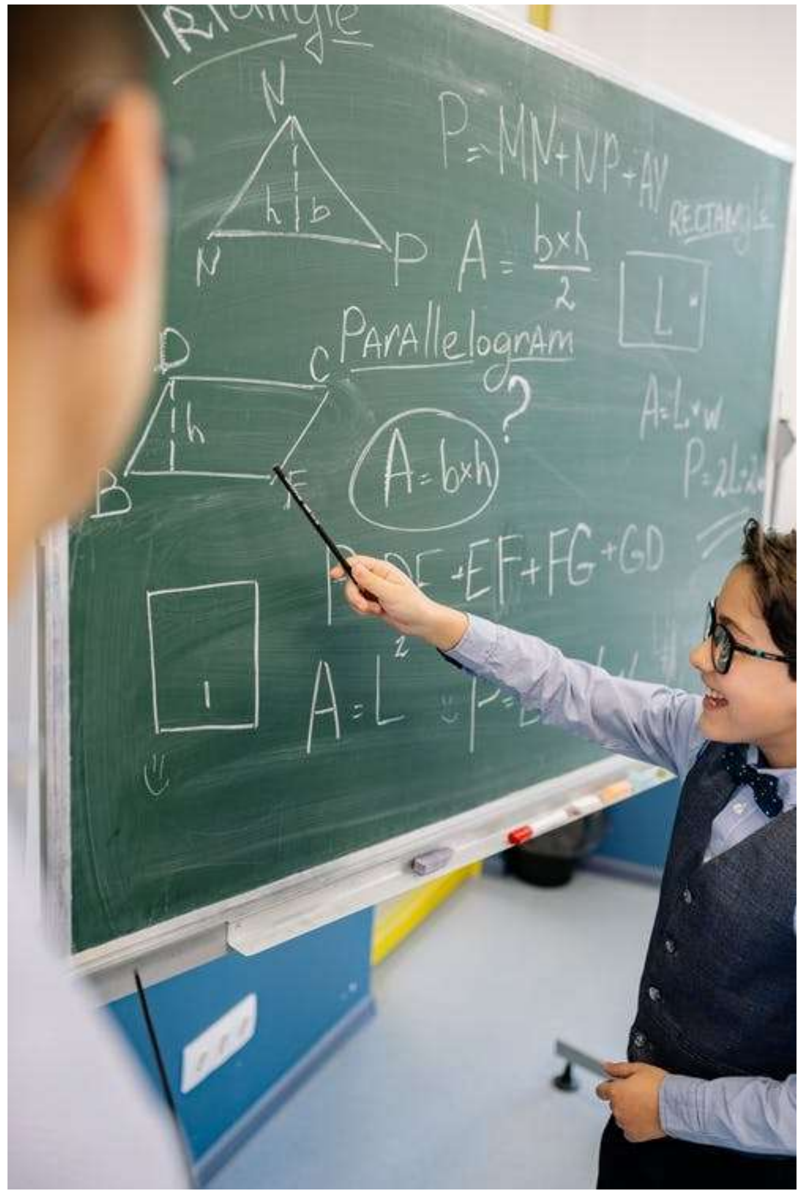
Scuola secondaria di primo grado

Rossella Garuti

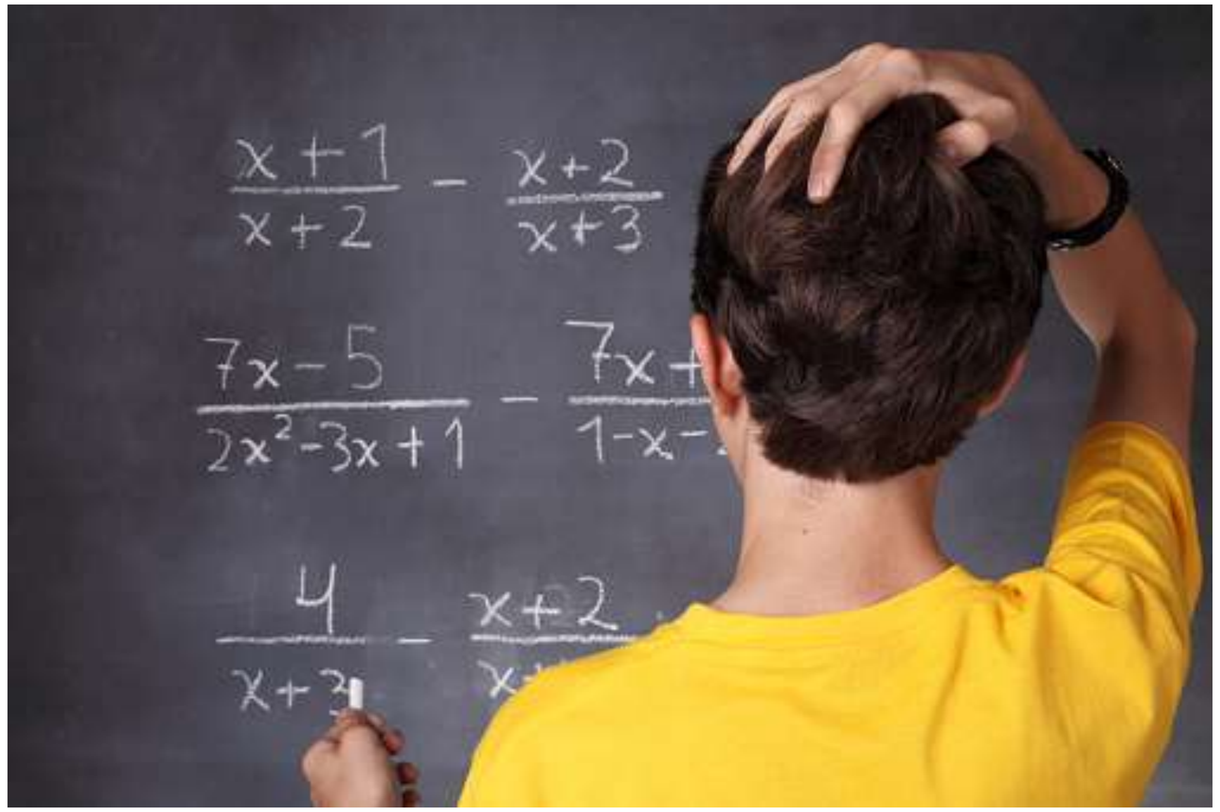


FOCUS

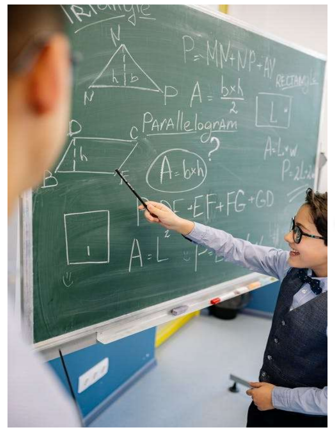
GEOMETRIA: area e perimetro

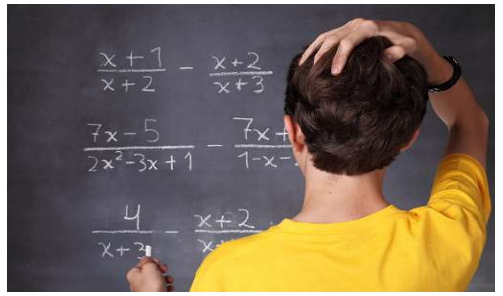


ALGEBRA: espressioni algebriche



Perché questo percorso didattico?





- Il campo di esperienza delle figure geometriche, come ambito di approccio all’algebra, ha il vantaggio di presentare elementi che possono condurre gli allievi a COSTRUIRE e INTERPRETARE formule algebriche attraverso un processo stenografico.
- La familiarità del contesto fa sì che la SEMANTICA prevalga sul controllo sintattico della formula scritta.
- L’EQUIVALENZA di formule è vista prevalentemente come modi diversi di guardare e scomporre la STESSA figura.

Un possibile percorso didattico

- Fase 1. Cos'è una formula e a cosa serve?
- Fase 2. Dalla figura alla formula
- Fase 3. Dalla formula alla figura

Fase 1. Cos’è e a cosa serve una formula?

Domande guida:

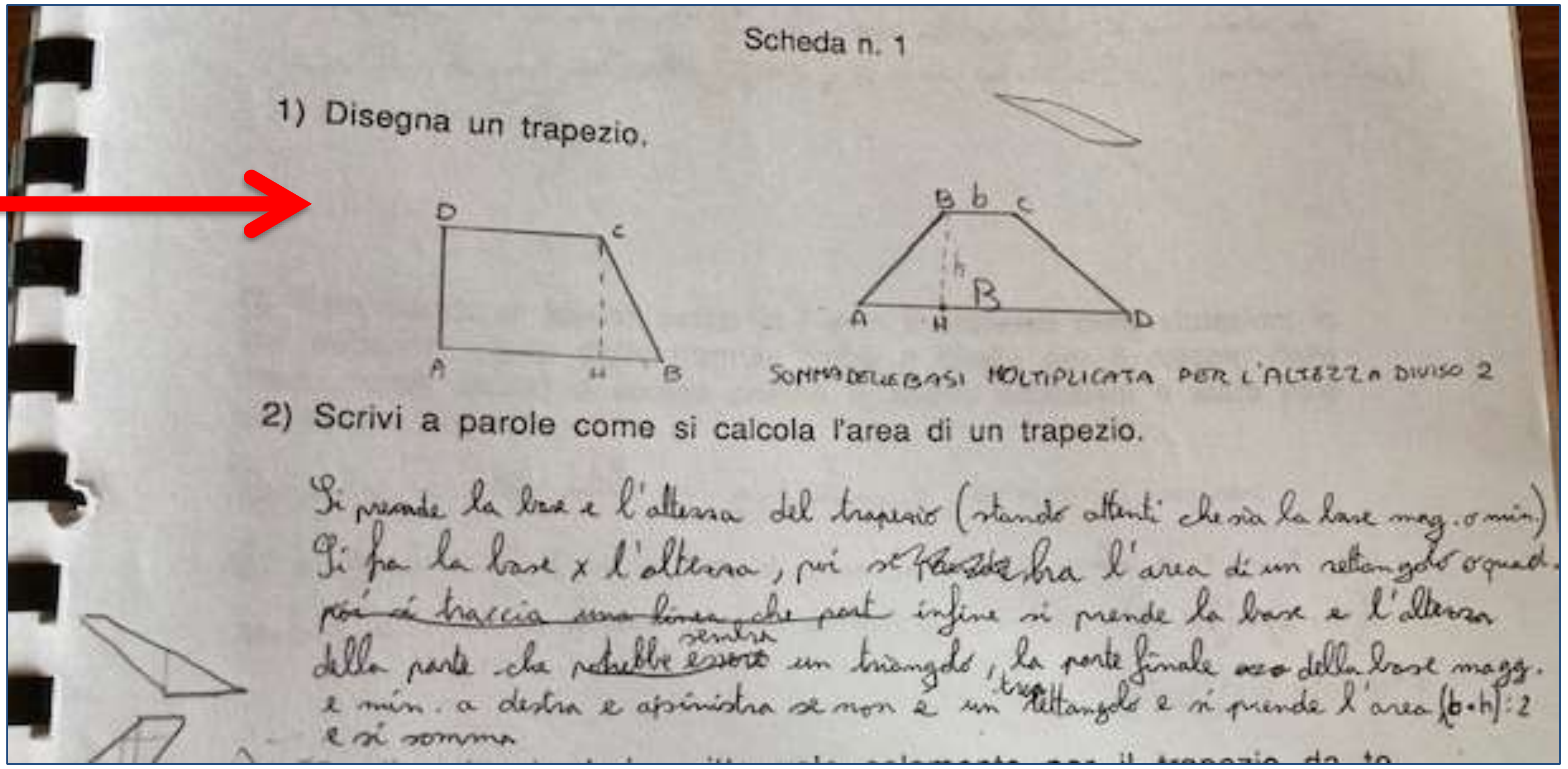
1. Disegna un trapezio
2. Scrivi a parole come si calcola l’area di un trapezio
3. Esprimi l’area del trapezio con una formula che sia valida per qualsiasi trapezio
4. Secondo te che cosa esprime e a cosa serve una formula?

- Introdurre l’attività attraverso un contesto famigliare agli studenti
- Far emergere le conoscenze e le concezioni degli studenti relative a una formula

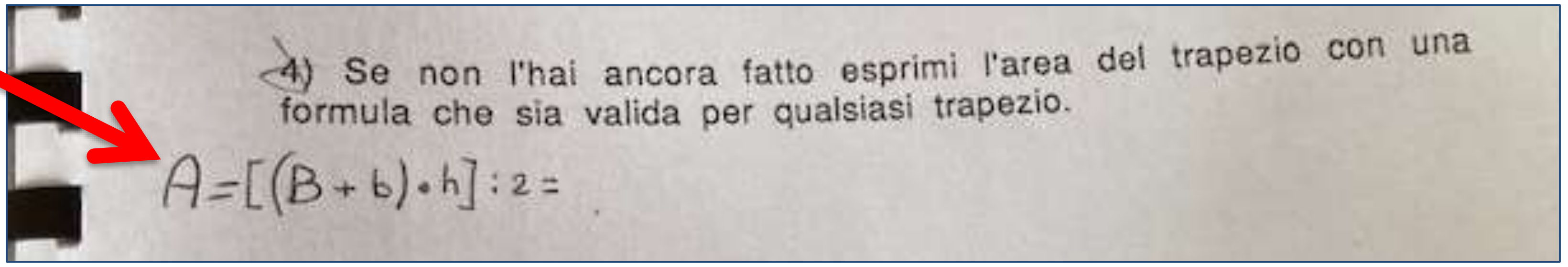
Fase 1. Cos'è e a cosa serve una formula?

Domande guida:

1. *Disegna un trapezio*
2. ***Scrivi a parole come si calcola l'area di un trapezio***
3. *Quello che hai scritto è valido per qualsiasi trapezio?*
4. ***Esprimi l'area del trapezio con una formula che sia valida per qualsiasi trapezio***
5. *Secondo te che cosa esprime e a cosa serve una formula?*



L'area viene calcolata per scomposizione (due tipologie di trapezi)



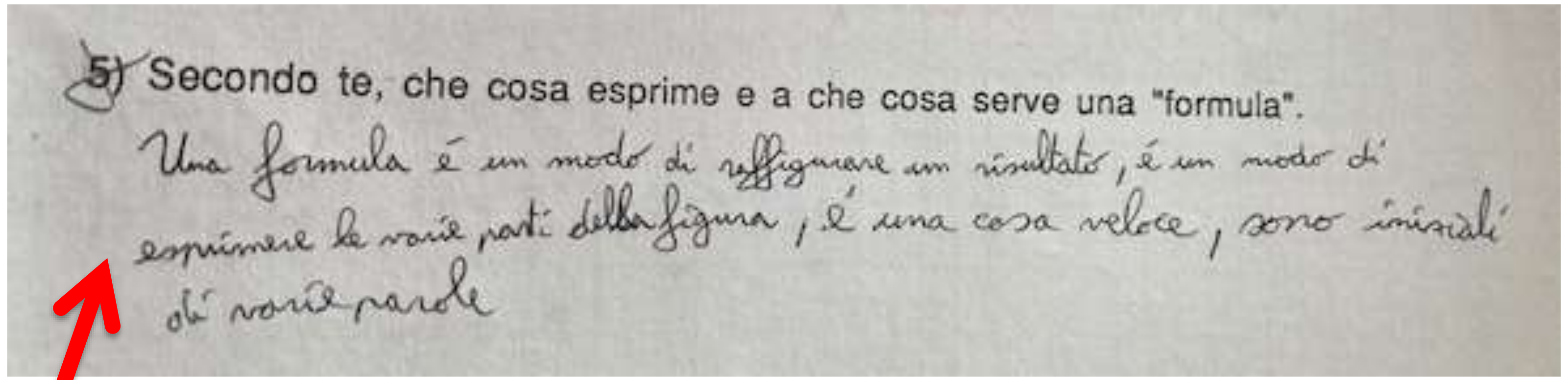
La formula sembra non avere nessun collegamento con il procedimento descritto sopra

INVALSI

Fase 1. Cos'è e a cosa serve una formula?

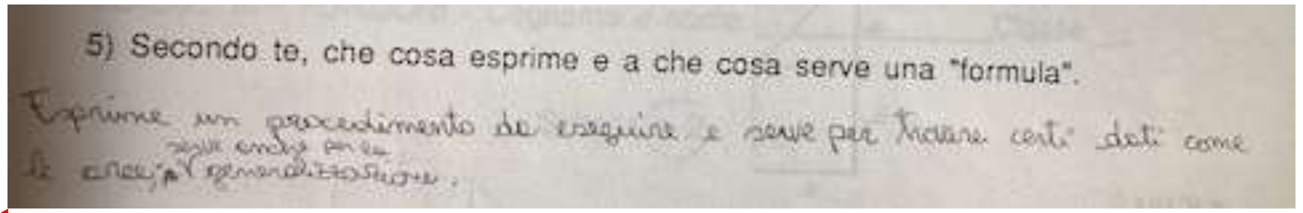
Domande guida:

1. *Disegna un trapezio*
2. *Scrivi a parole come si calcola l'area di un trapezio*
3. *Quello che hai scritto è valido per qualsiasi trapezio?*
4. *Esprimi l'area del trapezio con una formula che sia valida per qualsiasi trapezio*
5. ***Secondo te che cosa esprime e a cosa serve una formula?***


5) Secondo te, che cosa esprime e a che cosa serve una "formula".
Una formula è un modo di raffigurare un risultato, è un modo di esprimere le varie parti della figura, è una cosa veloce, sono iniziali di varie parole

"Una formula è un modo di raffigurare un risultato, è un modo di esprimere le varie parti della figura, è una cosa veloce, sono iniziali di varie parole" (Davide).

FUNZIONE "stenografica"

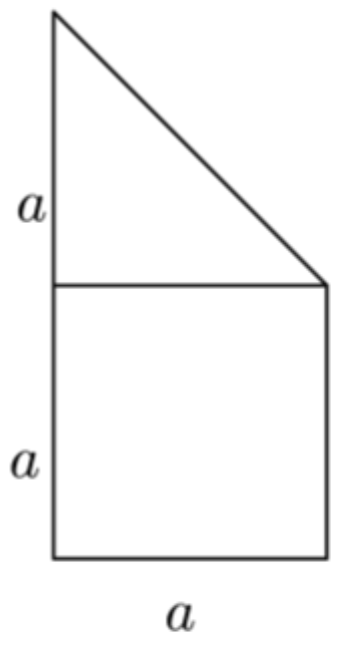

5) Secondo te, che cosa esprime e a che cosa serve una "formula".

"Esprime un procedimento da seguire e serve per trovare certi dati come le aree e serve anche per la generalizzazione" (Lucia).

FUNZIONE "procedurale"

FUNZIONE "di generalizzazione"

Fase 2. Dalla figura alla formula



1. Esprimi, utilizzando le lettere presenti nel disegno, la lunghezza del lato più lungo della figura qui rappresentata.

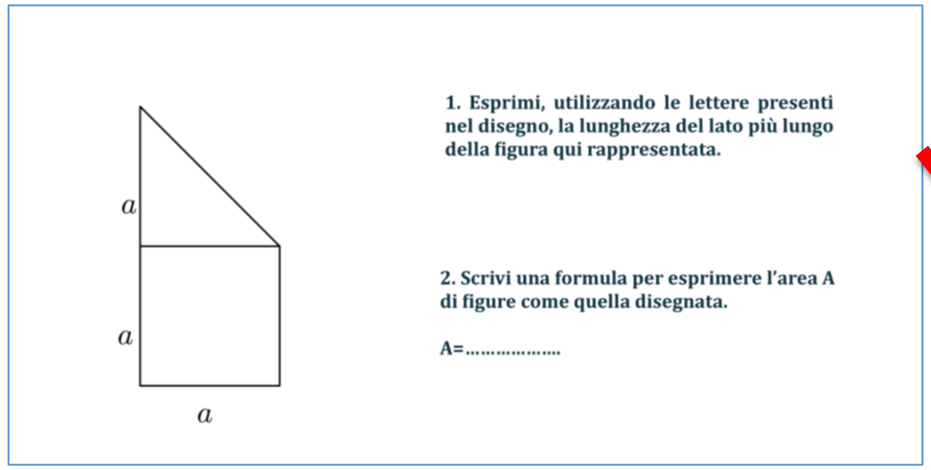
2. Scrivi una formula per esprimere l'area A di figure come quella disegnata.

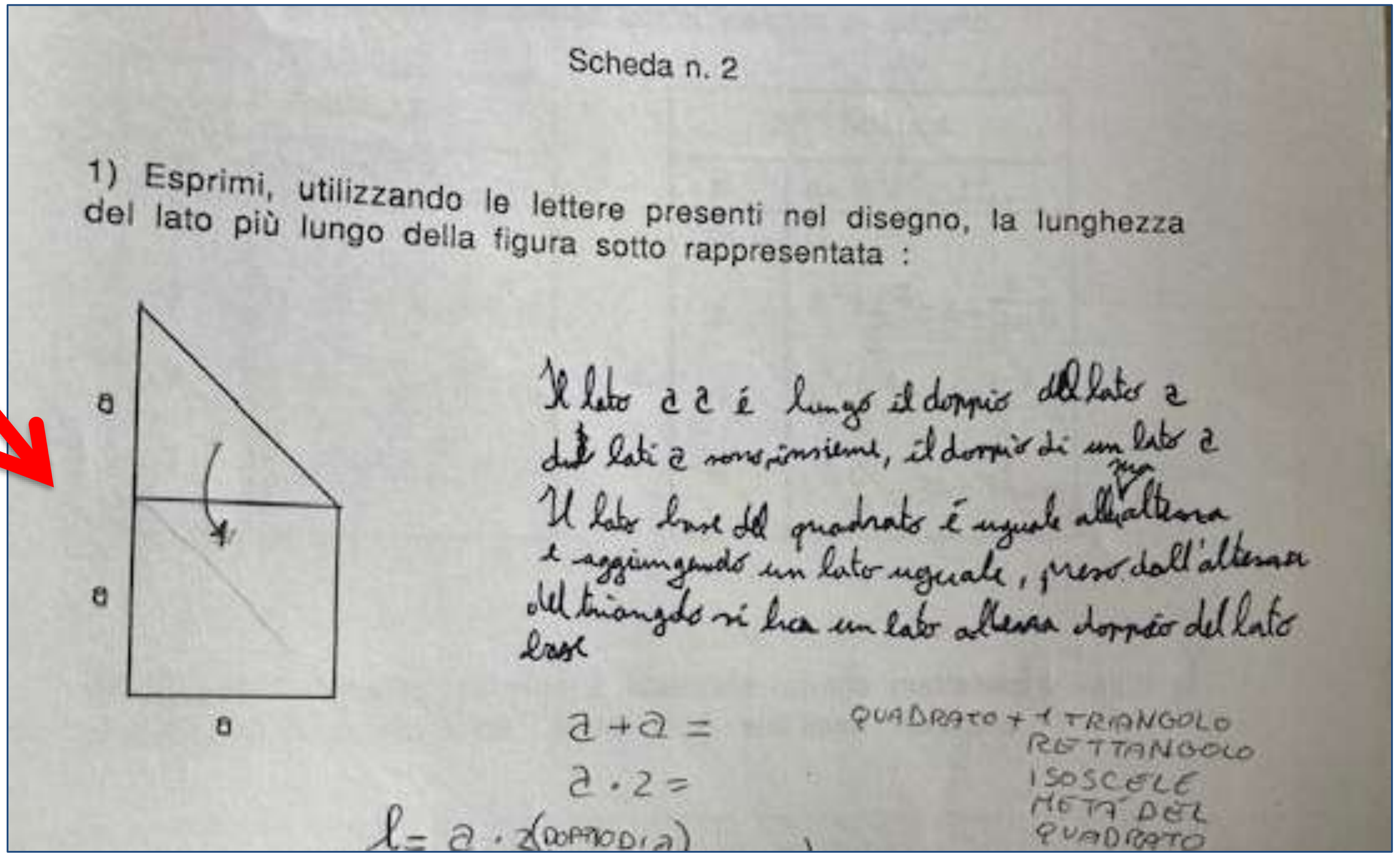
A=………………

1. **Nominalizzazione** del lato "lungo" del trapezio

2. **Costruzione** di una formula

Fase 2. Dalla figura alla formula





Duplice significato delle formule nel linguaggio algebrico: relazionale e procedurale

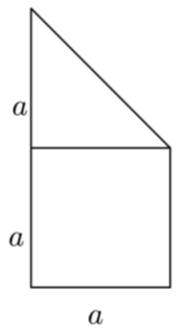
Espressioni equivalenti, significati diversi

"Il lato aa è il doppio del lato a….."

$a + a$ → Somma di due lati uguali

$2 \cdot a$ → Doppio del lato *a*

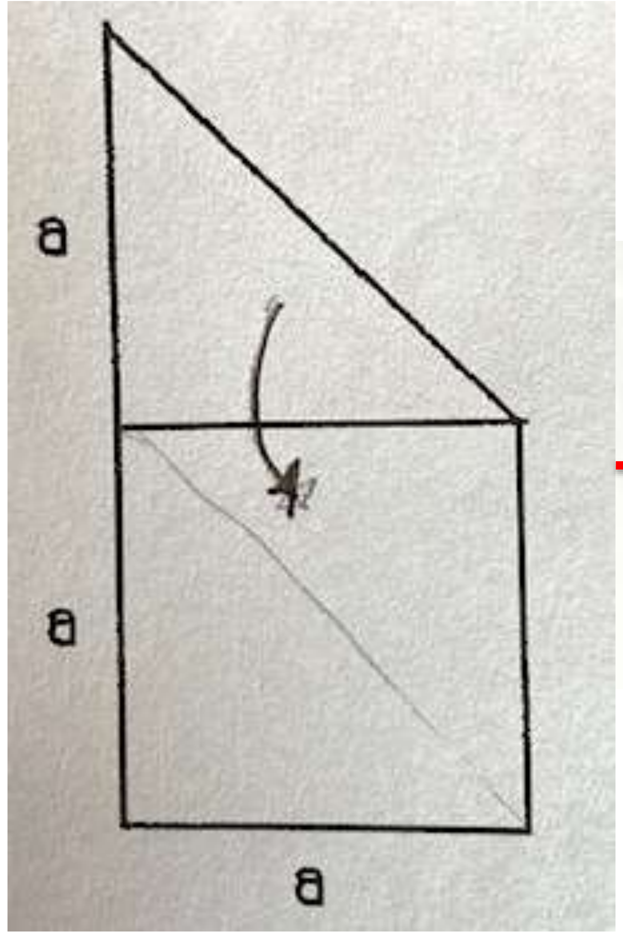
Fase 2. Dalla figura alla formula

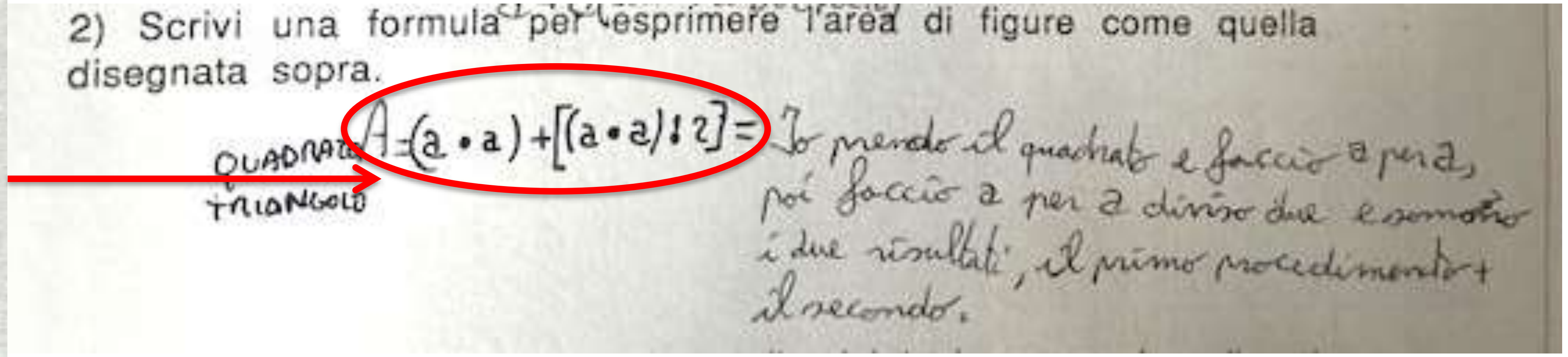


1. Esprimi, utilizzando le lettere presenti nel disegno, la lunghezza del lato più lungo della figura qui rappresentata.

2. Scrivi una formula per esprimere l'area A di figure come quella disegnata.

A=..................





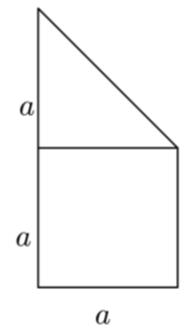
2) Scrivi una formula per esprimere l'area di figure come quella disegnata sopra.

QUADRATO
TRIANGOLO
$A = (a \cdot a) + [(a \cdot a) : 2] =$ Io prendo il quadrato e faccio a per a, poi faccio a per a diviso due e sommo i due risultati, il primo procedimento + il secondo.

"Io prendo il quadrato e faccio a per a, poi faccio a per a diviso 2 e sommo i due risultati, il primo procedimento più il secondo" (Davide).

La formula è assolutamente coerente con l'esplorazione geometrica sulla figura data: è la stenografia del suo procedimento

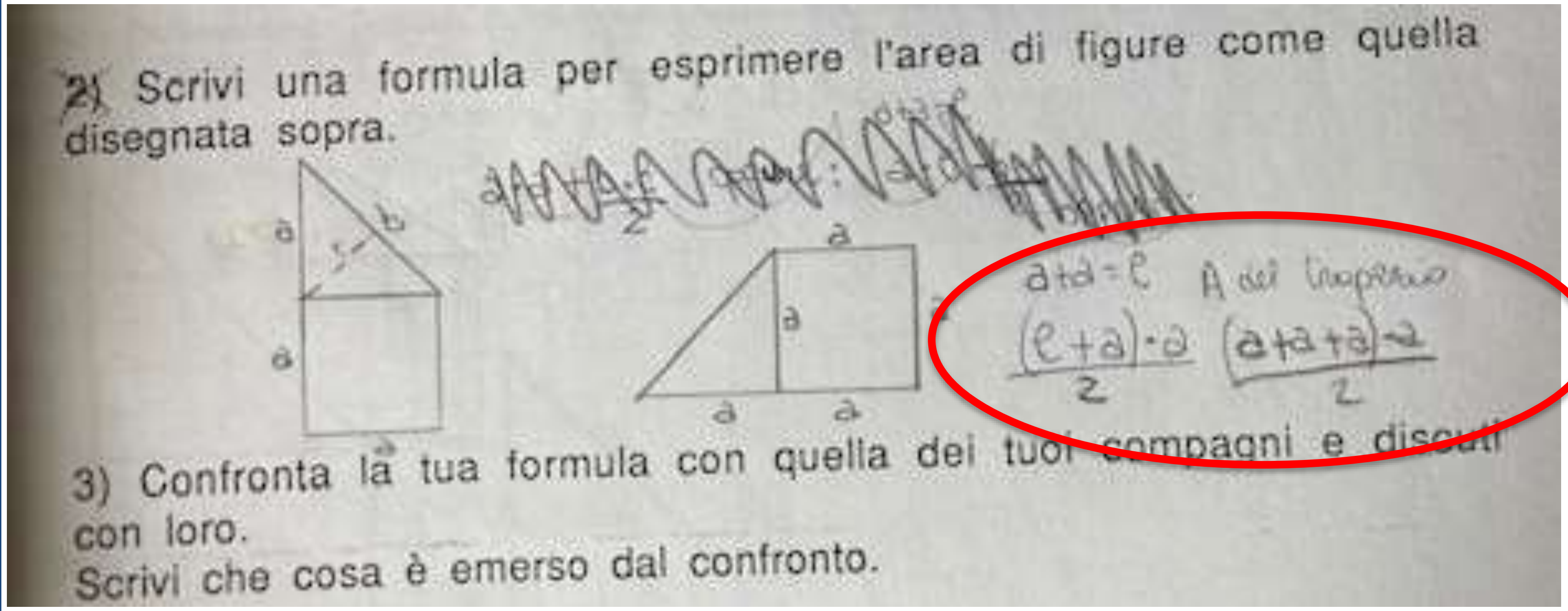
Fase 2. Dalla figura alla formula



1. Esprimi, utilizzando le lettere presenti nel disegno, la lunghezza del lato più lungo della figura qui rappresentata.

2. Scrivi una formula per esprimere l'area A di figure come quella disegnata.

A=………………


2) Scrivi una formula per esprimere l'area di figure come quella disegnata sopra.

a+a=c A del trapezio

$\frac{(c+a)\cdot a}{2}$ $\frac{(a+a+a)\cdot a}{2}$

3) Confronta la tua formula con quella dei tuoi compagni e discuti con loro.
Scrivi che cosa è emerso dal confronto.

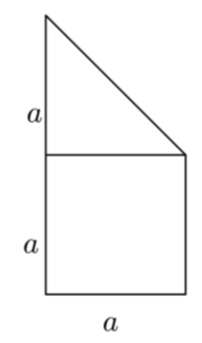
Lucia

Possiamo osservare che:

- nella prima figura aggiunge lettere (b e c);
- “gira” la figura secondo il modello standard dei trapezi e inserisce la lettera *a* dove “manca ”;
- la costruzione della formula mostra la fatica nel coordinare l’aspetto geometrico con quello algebrico: passa attraverso la formula del trapezio e solo alla fine esprime l’area in funzione di *a,* realizzando così il legame fra la figura e i simboli algebrici.

INVALSI

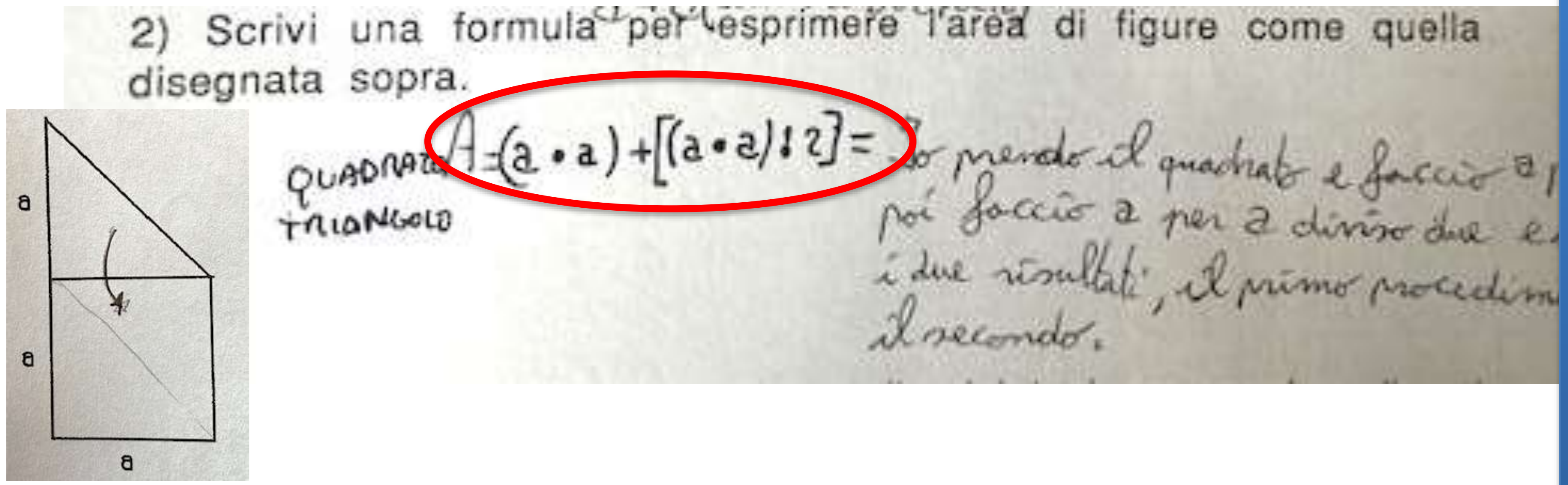
Fase 2. Dalla figura alla formula

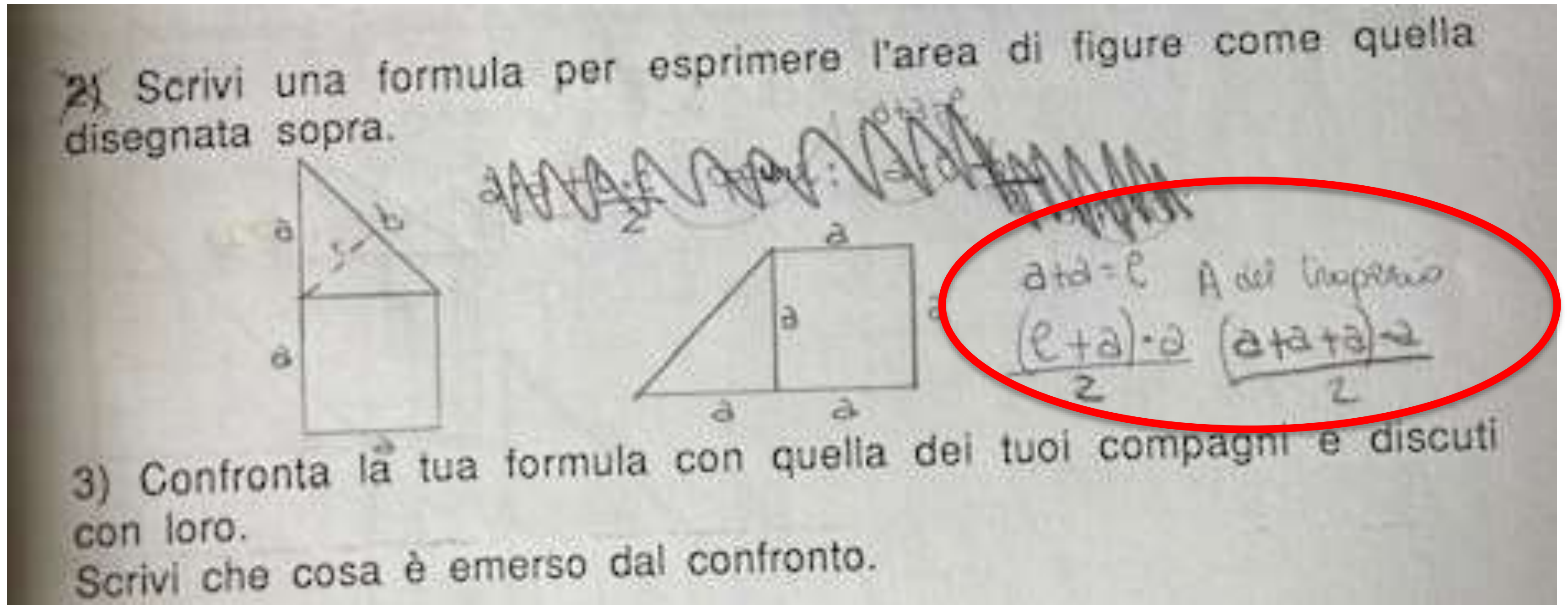


1. Esprimi, utilizzando le lettere presenti nel disegno, la lunghezza del lato più lungo della figura qui rappresentata.

2. Scrivi una formula per esprimere l'area A di figure come quella disegnata.

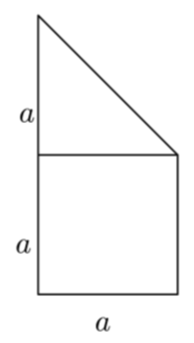
A=………………





- ✓ Coerenza fra rappresentazione geometrica e algebrica
- ✓ Espressioni equivalenti, significati diversi

Fase 2. Dalla figura alla formula



1. Esprimi, utilizzando le lettere presenti nel disegno, la lunghezza del lato più lungo della figura qui rappresentata.

2. Scrivi una formula per esprimere l'area A di figure come quella disegnata.

A=………………

CONSIGLI

- ✓ Lasciare tempo per la costruzione del **senso** del simbolo (vedi Davide)
- ✓ La costruzione di una formula è un compito **COMPLESSO** (vedi Lucia)
- ✓ E' importante discutere anche la rappresentazione geometrica delle formule errate

…ato a…..”

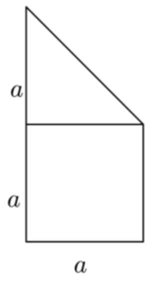
…di due lati uguali

…del lato *a*

…verse per

…ra

Fase 2. Dalla figura alla formula



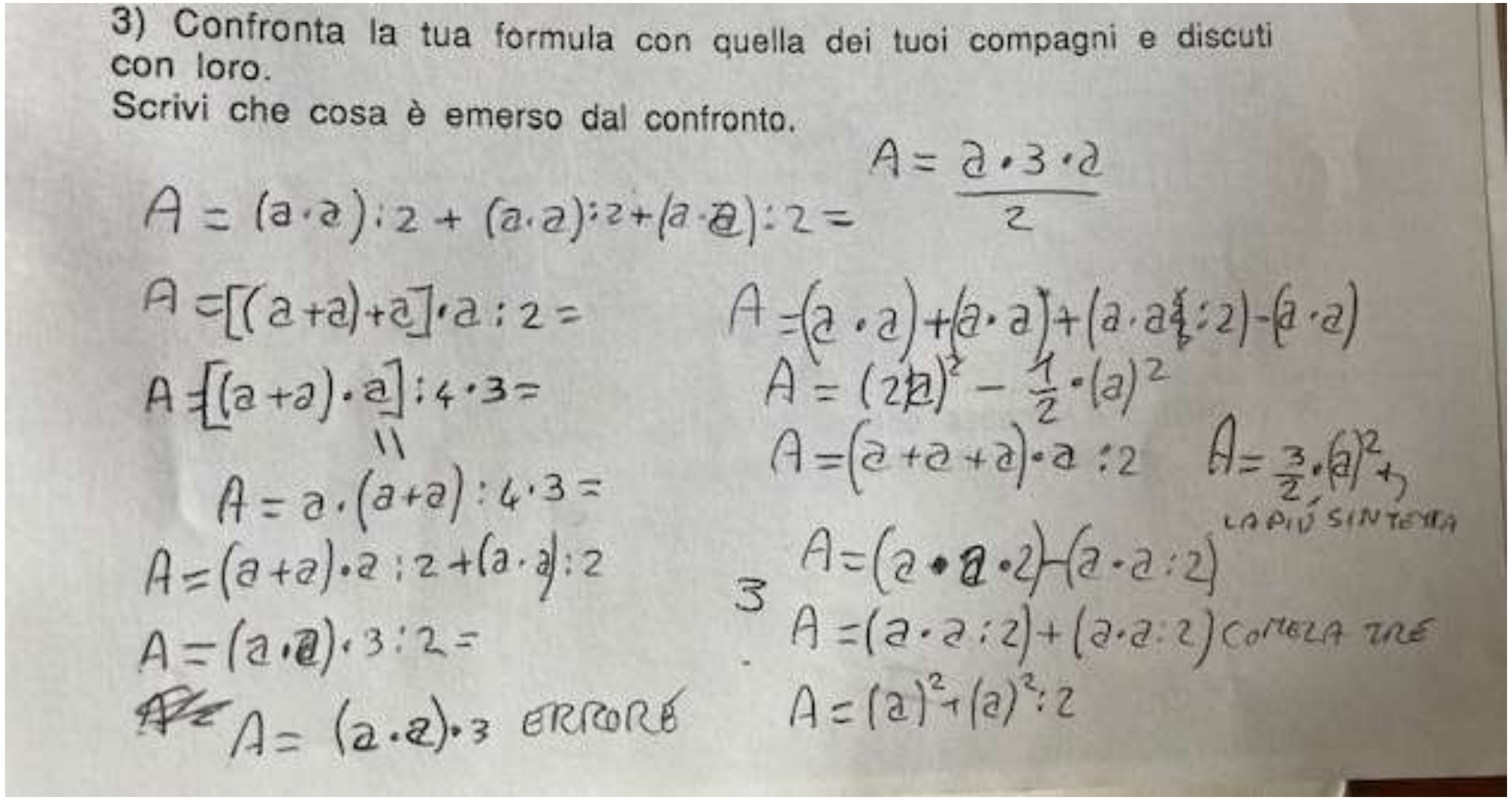
1. Esprimi, utilizzando le lettere presenti nel disegno, la lunghezza del lato più lungo della figura qui rappresentata.

2. Scrivi una formula per esprimere l'area A di figure come quella disegnata.

A=..................

Tante formule per una sola figura!

Confronto e discussione sulle formule costruite dagli studenti



3) Confronta la tua formula con quella dei tuoi compagni e discuti con loro.
Scrivi che cosa è emerso dal confronto.

$A = \frac{a \cdot 3 \cdot a}{2}$

$A = (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2 =$

$A = [(a + a) + a] \cdot a : 2 =$

$A = [(a + a) \cdot a] : 4 \cdot 3 =$

$\|$

$A = a \cdot (a + a) : 4 \cdot 3 =$

$A = (a + a) \cdot a : 2 + (a \cdot a) : 2$

$A = (a \cdot a) \cdot 3 : 2 =$

$A = (a \cdot a) \cdot 3$ ERRORE

$A = (a \cdot a) + (a \cdot a) + (a \cdot a : 2) - (a \cdot a)$

$A = (2a)^2 - \frac{1}{2} \cdot (a)^2$

$A = (a + a + a) \cdot a : 2$

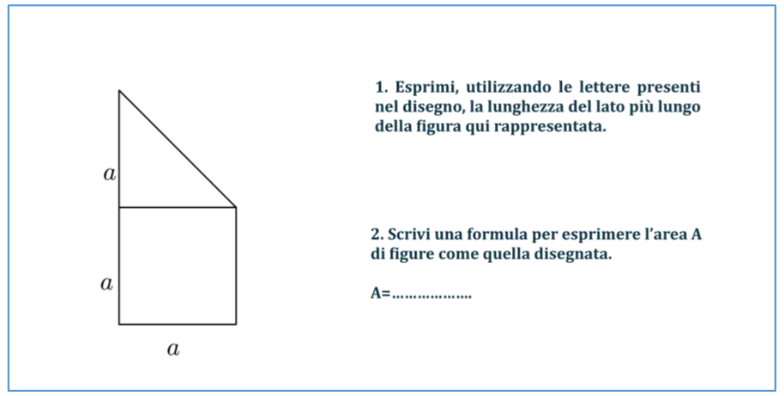
$A = \frac{3}{2} \cdot (a)^2$ LA PIÙ SINTETICA

3 $A = (a \cdot a \cdot 2) - (a \cdot a : 2)$

$A = (a \cdot a : 2) + (a \cdot a : 2)$ COME LA TRE

$A = (a)^2 + (a)^2 : 2$

Fase 2. Dalla figura alla formula


1. Esprimi, utilizzando le lettere presenti nel disegno, la lunghezza del lato più lungo della figura qui rappresentata.

2. Scrivi una formula per esprimere l'area A di figure come quella disegnata.

A=………………

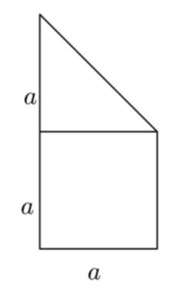
Confronto e discussione sulle formule costruite dagli studenti

Tante formule per una sola figura!

3) Confronta la tua formula con quella dei tuoi compagni e discuti con loro.

$A = a^2 + \frac{a^2}{2}$	$A = a \cdot a \cdot 2 - a \cdot a : 2$
$A = [(a+a) \cdot a] : 4 \cdot 3$	$A = \frac{a \cdot 3 \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a+a) \cdot a}{2} + \frac{a+a}{2}$	$A = \frac{(a+a+a) \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a \cdot a)}{2} \cdot 3$	$A = 2a \cdot a - \frac{a^2}{2}$
$A = (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2$	$A = \frac{(a+a+a) \cdot a}{2}$
$A = (a \cdot a) \cdot 3$	$A = \frac{3}{2} a^2$

Fase 2. Dalla figura alla formula



1. Esprimi, utilizzando le lettere presenti nel disegno, la lunghezza del lato più lungo della figura qui rappresentata.

2. Scrivi una formula per esprimere l'area A di figure come quella disegnata.

A=………………

Confronto e discussione sulle formule costruite dagli studenti

Tante

$A = a^2 + \frac{a^2}{2}$
$A = [(a + a$
$A = \frac{(a+a)\cdot a}{2}$
$A = \frac{(a \cdot a)}{2}$
$A = (a \cdot a):2$
$A = (a \cdot a)$

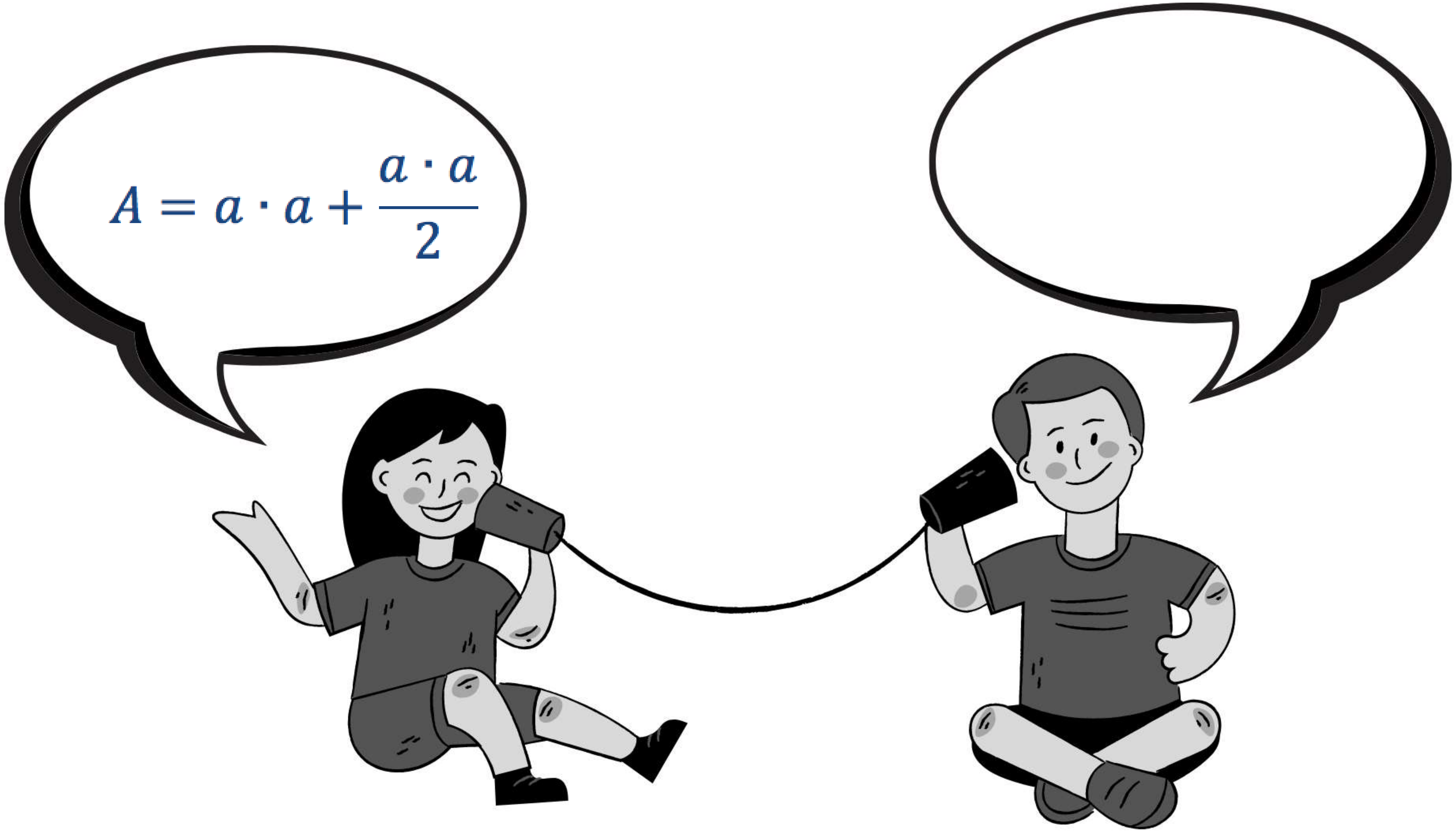
CONSIGLI

- ✓ NON avere fretta di far vedere che **algebricamente** le formule si equivalgono: lo scopo **NON** è la manipolazione algebrica
- ✓ Mantenere vivo il **significato** geometrico delle formule

Fase 3. Dalla formula alla figura

$A = a^2 + \frac{a^2}{2}$	$A = a \cdot a \cdot 2 - a \cdot a : 2$
$A = [(a + a) \cdot a] : 4 \cdot 3$	$A = \frac{a \cdot 3 \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a+a) \cdot a}{2} + \frac{a+a}{2}$	$A = \frac{(a + a + a) \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a \cdot a)}{2} \cdot 3$	$A = 2a \cdot a - \frac{a^2}{2}$
$A = (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2$	$A = \frac{(a + a + a) \cdot a}{2}$
$A = (a \cdot a) \cdot 3$	$A = \frac{3}{2} a^2$

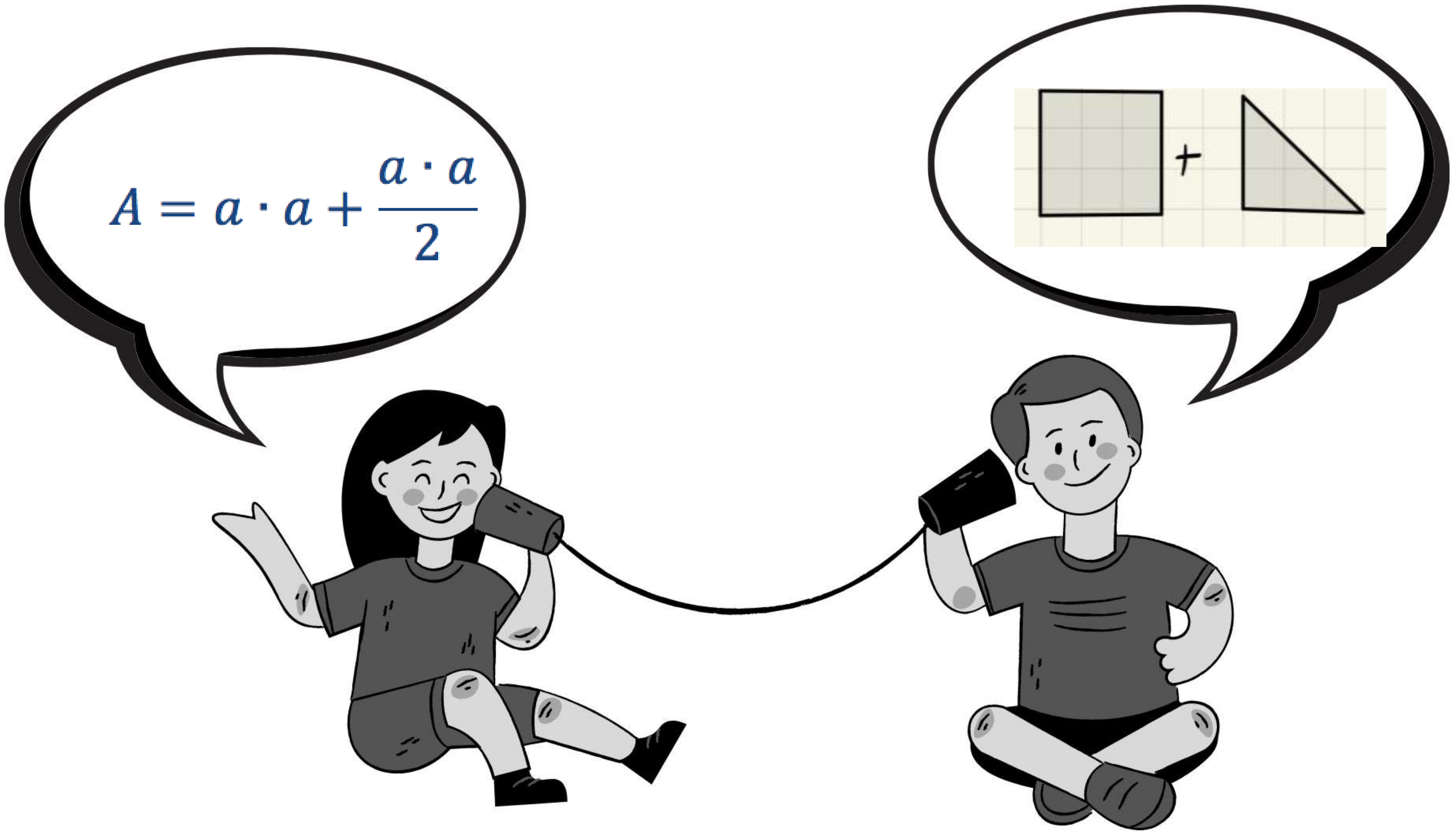
Per ognuna delle formule indicate spiega con un disegno e a parole che cosa "ha visto" il tuo compagno



Fase 3. Dalla formula alla figura

$A = a^2 + \frac{a^2}{2}$	$A = a \cdot a \cdot 2 - a \cdot a : 2$
$A = [(a + a) \cdot a] : 4 \cdot 3$	$A = \frac{a \cdot 3 \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a+a) \cdot a}{2} + \frac{a+a}{2}$	$A = \frac{(a + a + a) \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a \cdot a)}{2} \cdot 3$	$A = 2a \cdot a - \frac{a^2}{2}$
$A = (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2$	$A = \frac{(a + a + a) \cdot a}{2}$
$A = (a \cdot a) \cdot 3$	$A = \frac{3}{2} a^2$

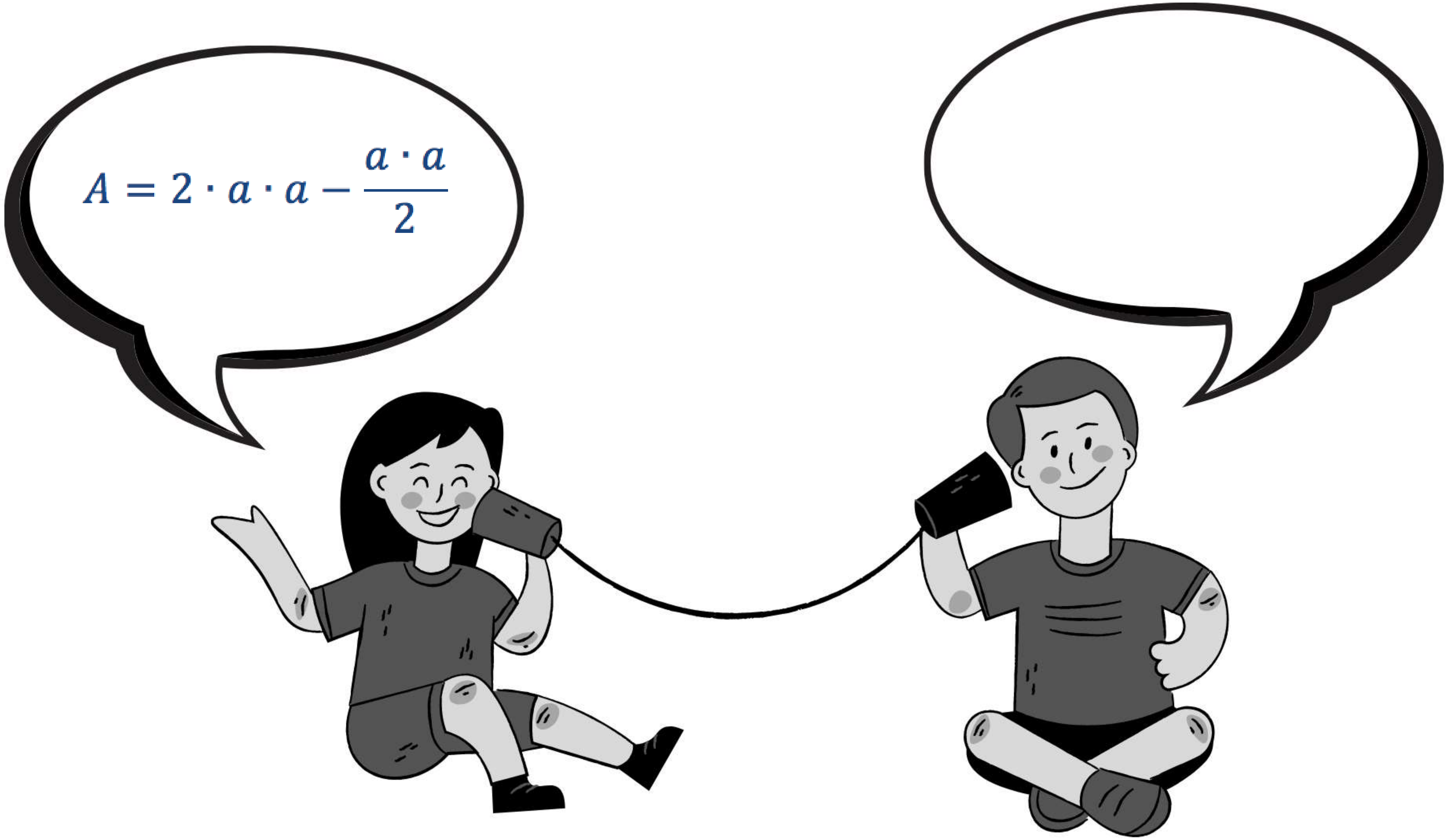
Per ognuna delle formule indicate spiega con un disegno e a parole che cosa "ha visto" il tuo compagno



Fase 3. Dalla formula alla figura

$A = a^2 + \frac{a^2}{2}$	$A = a \cdot a \cdot 2 - a \cdot a : 2$
$A = [(a + a) \cdot a] : 4 \cdot 3$	$A = \frac{a \cdot 3 \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a+a) \cdot a}{2} + \frac{a+a}{2}$	$A = \frac{(a + a + a) \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a \cdot a)}{2} \cdot 3$	$A = 2a \cdot a - \frac{a^2}{2}$
$A = (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2$	$A = \frac{(a + a + a) \cdot a}{2}$
$A = (a \cdot a) \cdot 3$	$A = \frac{3}{2} a^2$

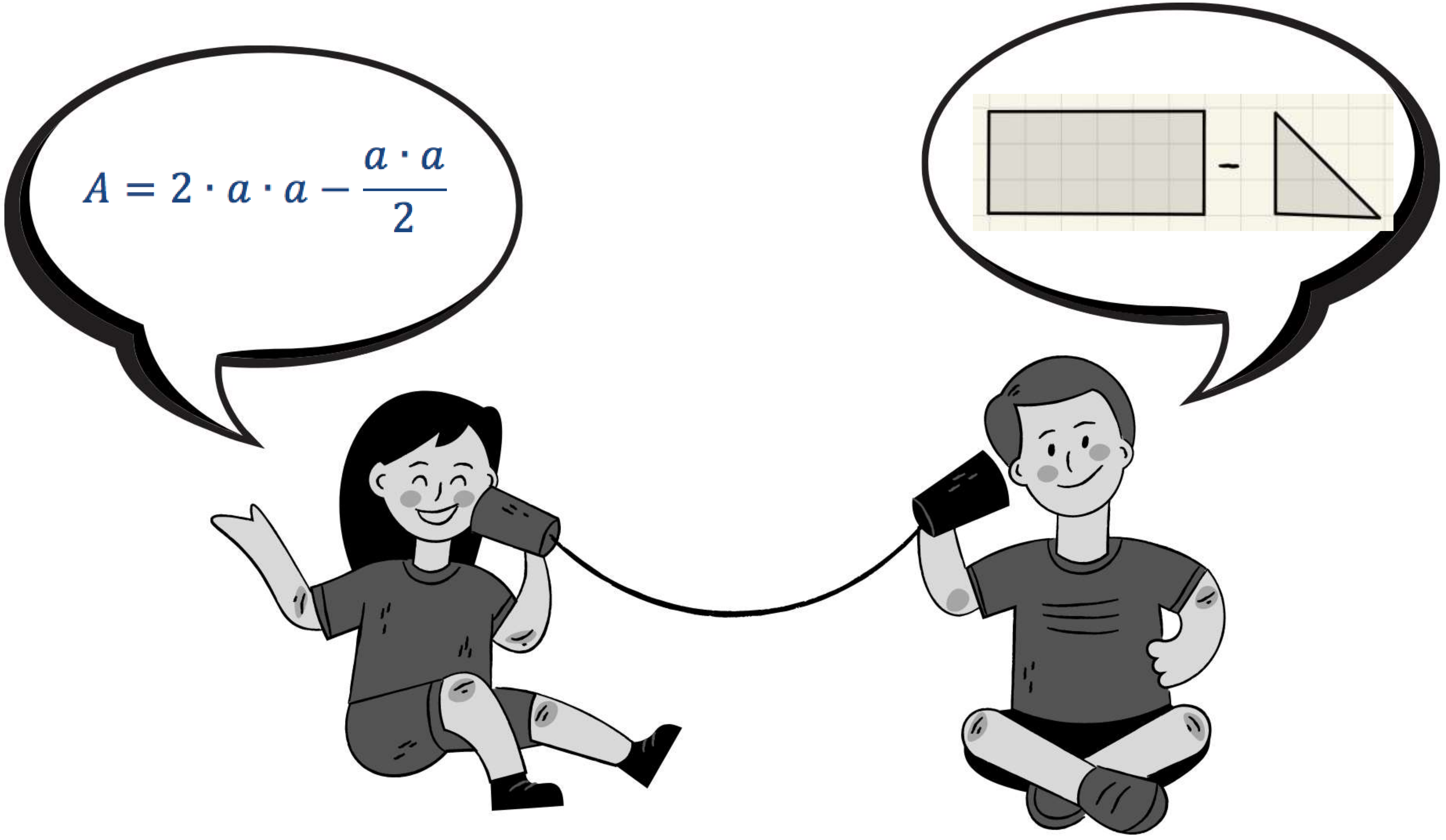
Per ognuna delle formule indicate spiega con un disegno e a parole che cosa "ha visto" il tuo compagno



Fase 3. Dalla formula alla figura

$A = a^2 + \frac{a^2}{2}$	$A = a \cdot a \cdot 2 - a \cdot a : 2$
$A = [(a + a) \cdot a] : 4 \cdot 3$	$A = \frac{a \cdot 3 \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a+a) \cdot a}{2} + \frac{a+a}{2}$	$A = \frac{(a + a + a) \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a \cdot a)}{2} \cdot 3$	$A = 2a \cdot a - \frac{a^2}{2}$
$A = (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2$	$A = \frac{(a + a + a) \cdot a}{2}$
$A = (a \cdot a) \cdot 3$	$A = \frac{3}{2} a^2$

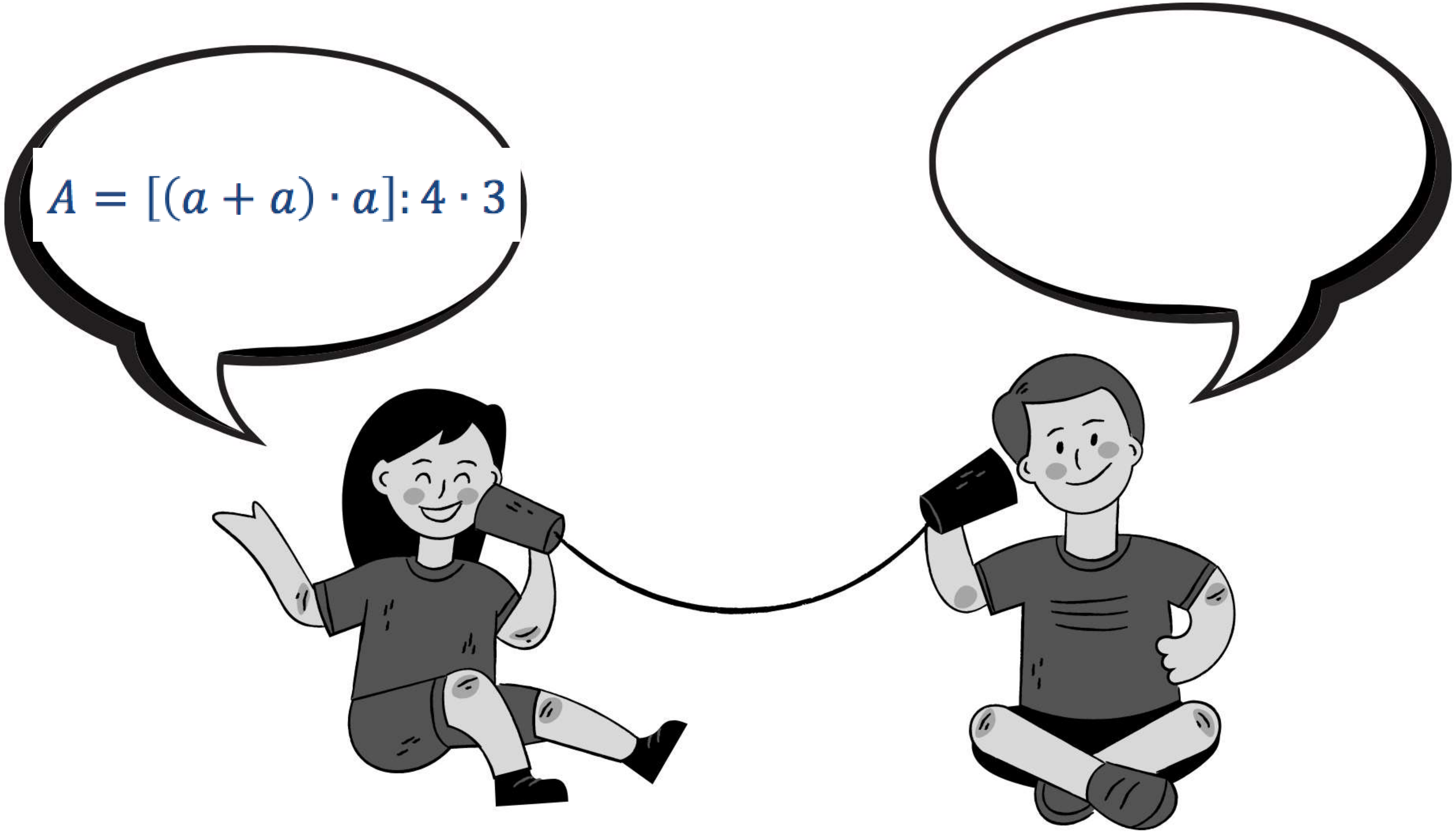
Per ognuna delle formule indicate spiega con un disegno e a parole che cosa "ha visto" il tuo compagno



Fase 3. Dalla formula alla figura

$A = a^2 + \frac{a^2}{2}$	$A = a \cdot a \cdot 2 - a \cdot a : 2$
$A = [(a + a) \cdot a] : 4 \cdot 3$	$A = \frac{a \cdot 3 \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a+a) \cdot a}{2} + \frac{a+a}{2}$	$A = \frac{(a + a + a) \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a \cdot a)}{2} \cdot 3$	$A = 2a \cdot a - \frac{a^2}{2}$
$A = (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2$	$A = \frac{(a + a + a) \cdot a}{2}$
$A = (a \cdot a) \cdot 3$	$A = \frac{3}{2}a^2$

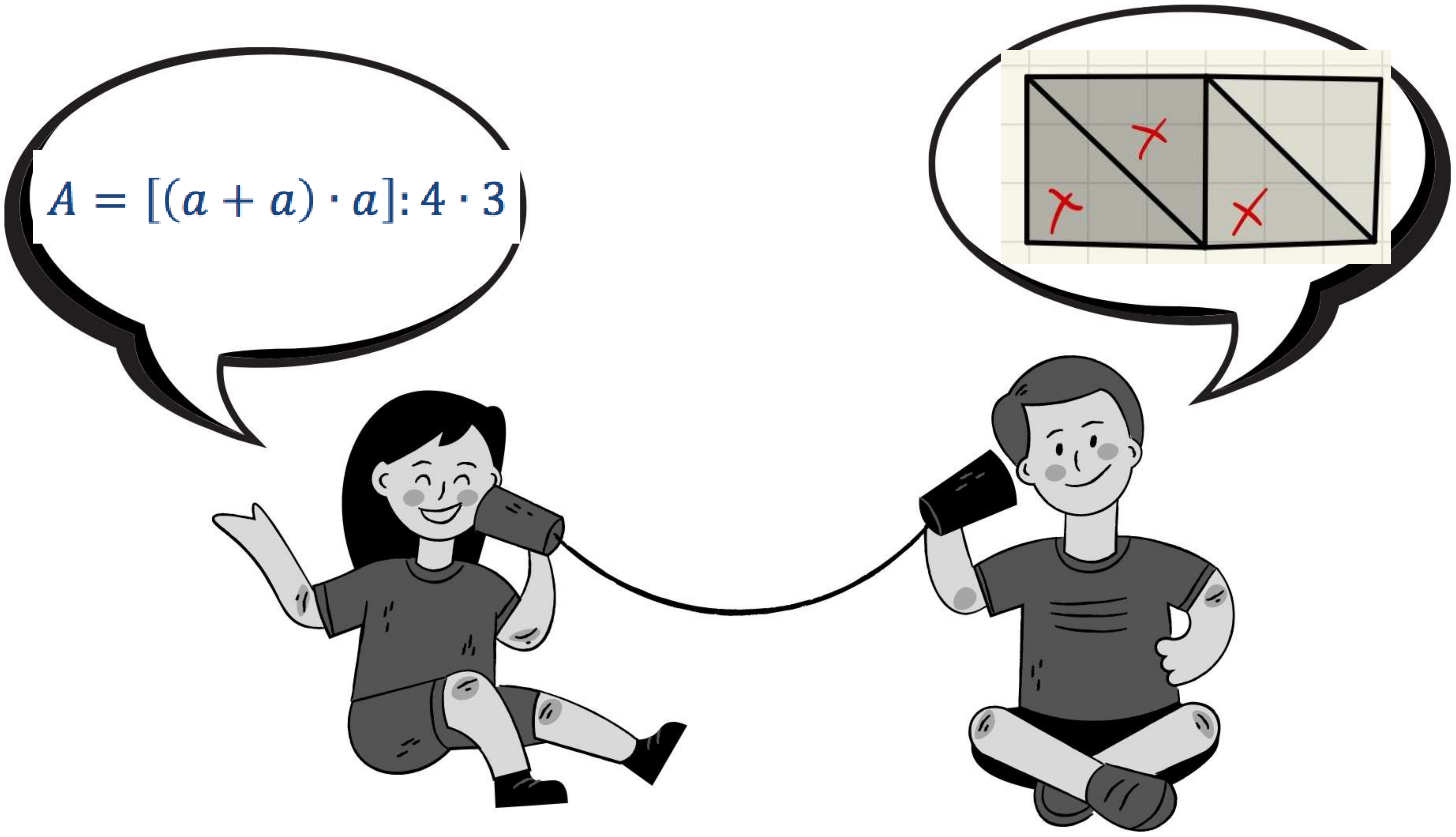
Per ognuna delle formule indicate spiega con un disegno e a parole che cosa "ha visto" il tuo compagno



Fase 3. Dalla formula alla figura

$A = a^2 + \frac{a^2}{2}$	$A = a \cdot a \cdot 2 - a \cdot a : 2$
$A = [(a + a) \cdot a] : 4 \cdot 3$	$A = \frac{a \cdot 3 \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a+a) \cdot a}{2} + \frac{a+a}{2}$	$A = \frac{(a + a + a) \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a \cdot a)}{2} \cdot 3$	$A = 2a \cdot a - \frac{a^2}{2}$
$A = (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2$	$A = \frac{(a + a + a) \cdot a}{2}$
$A = (a \cdot a) \cdot 3$	$A = \frac{3}{2} a^2$

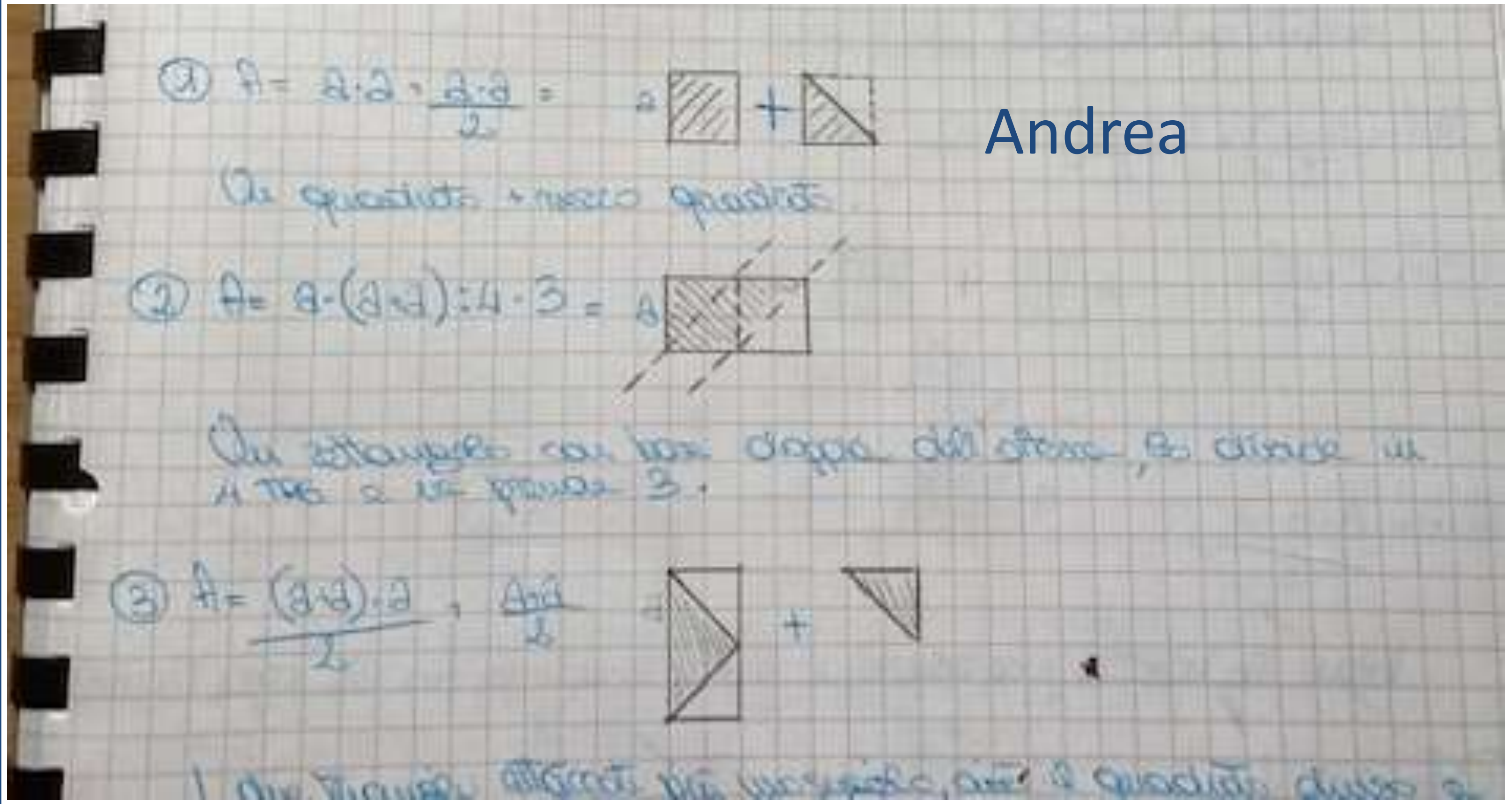
Per ognuna delle formule indicate spiega con un disegno e a parole che cosa "ha visto" il tuo compagno

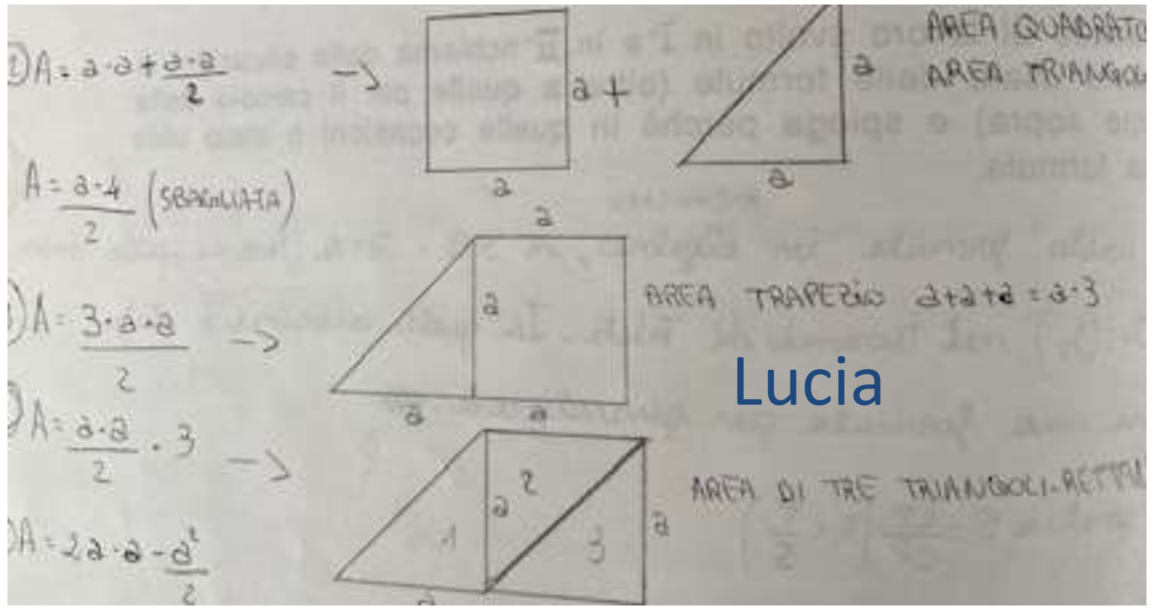


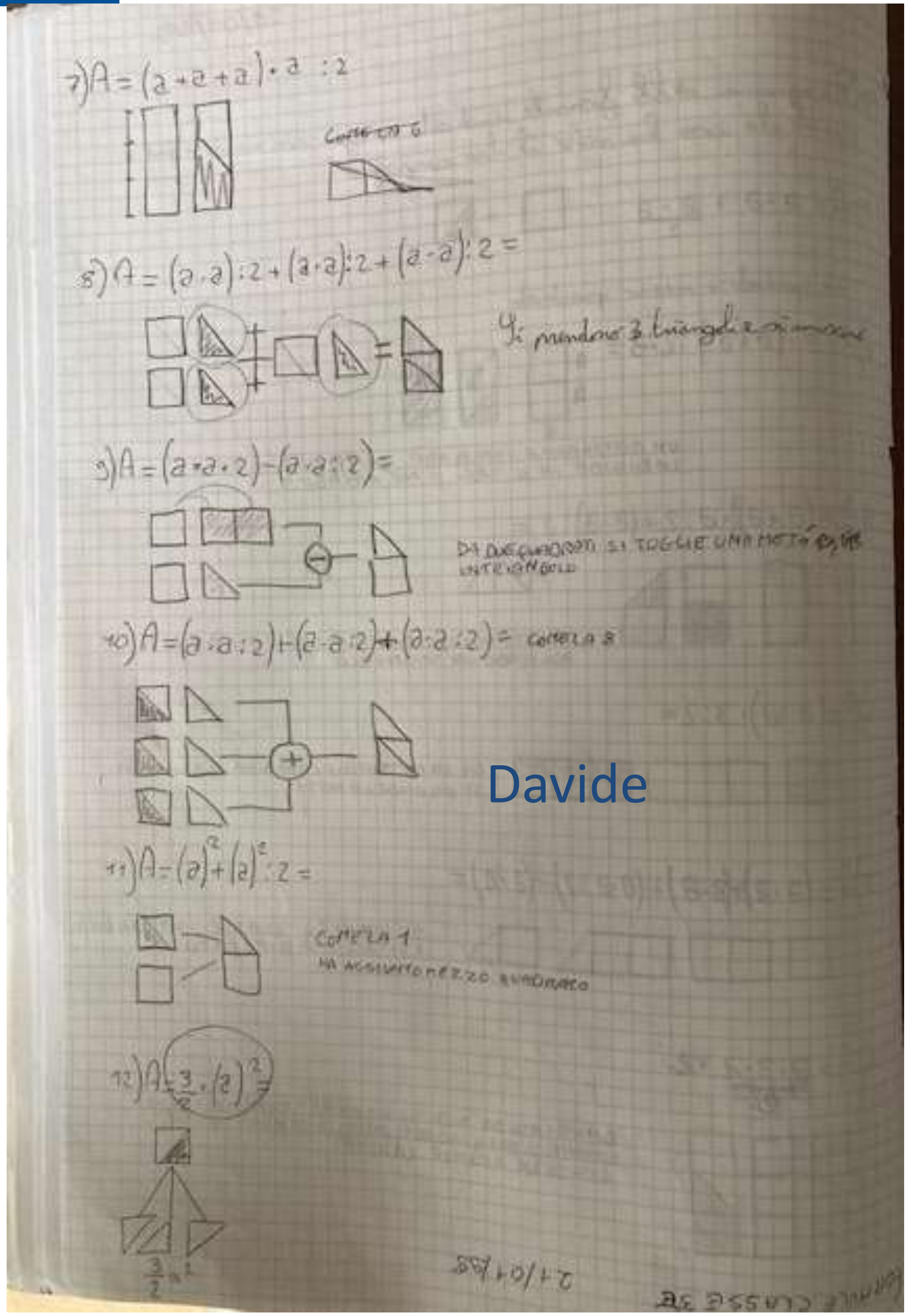
Fase 3. Dalla formula alla figura

$A = a^2 + \frac{a^2}{2}$	$A = a \cdot a \cdot 2 - a \cdot a : 2$
$A = [(a+a) \cdot a] : 4 \cdot 3$	$A = \frac{a \cdot 3 \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a+a) \cdot a}{2} + \frac{a+a}{2}$	$A = \frac{(a+a+a) \cdot a}{2}$
$A = \frac{(a \cdot a)}{2} \cdot 3$	$A = 2a \cdot a - \frac{a^2}{2}$
$A = (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2 + (a \cdot a) : 2$	$A = \frac{(a+a+a) \cdot a}{2}$
$A = (a \cdot a) \cdot 3$	$A = \frac{3}{2} a^2$

Per ognuna delle formule indicate spiega con un disegno e a parole che cosa "ha visto" il tuo/a compagno/a







Punti di attenzione di questo percorso

Simboli in contesto (in questo caso un contesto geometrico)

Espressioni equivalenti significati diversi (attenzione all'aspetto semantico)

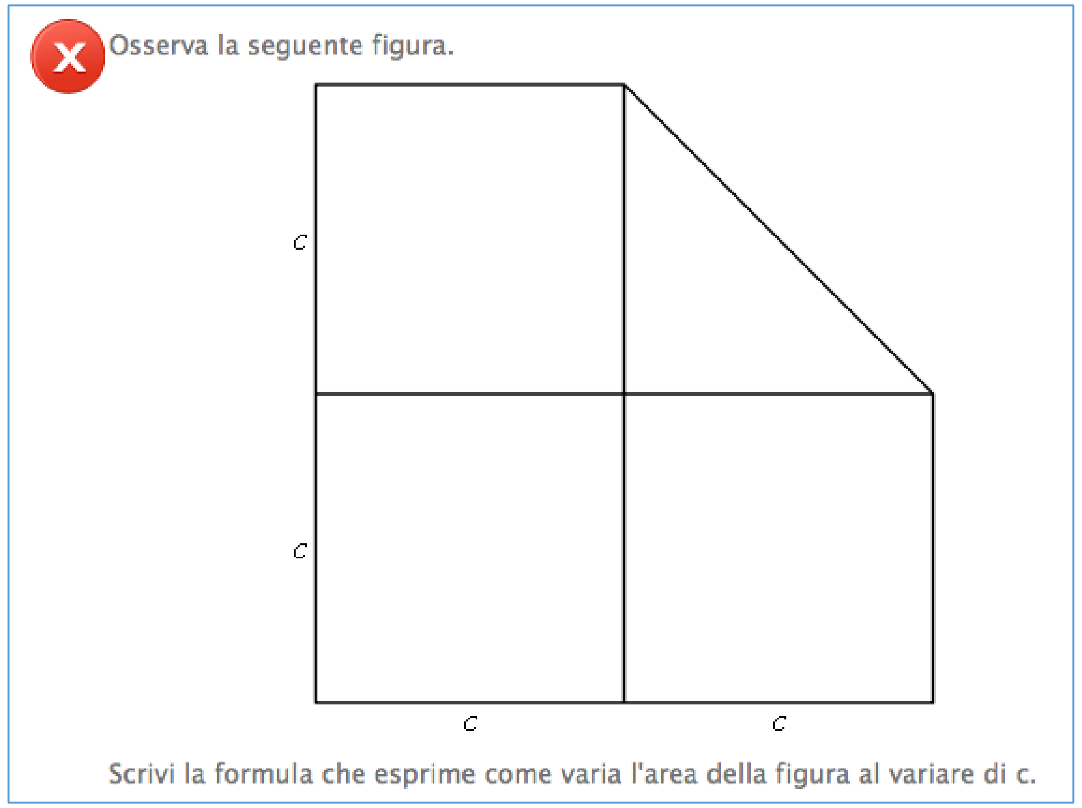
Arcavi, A.(1994) Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*

INVALSI

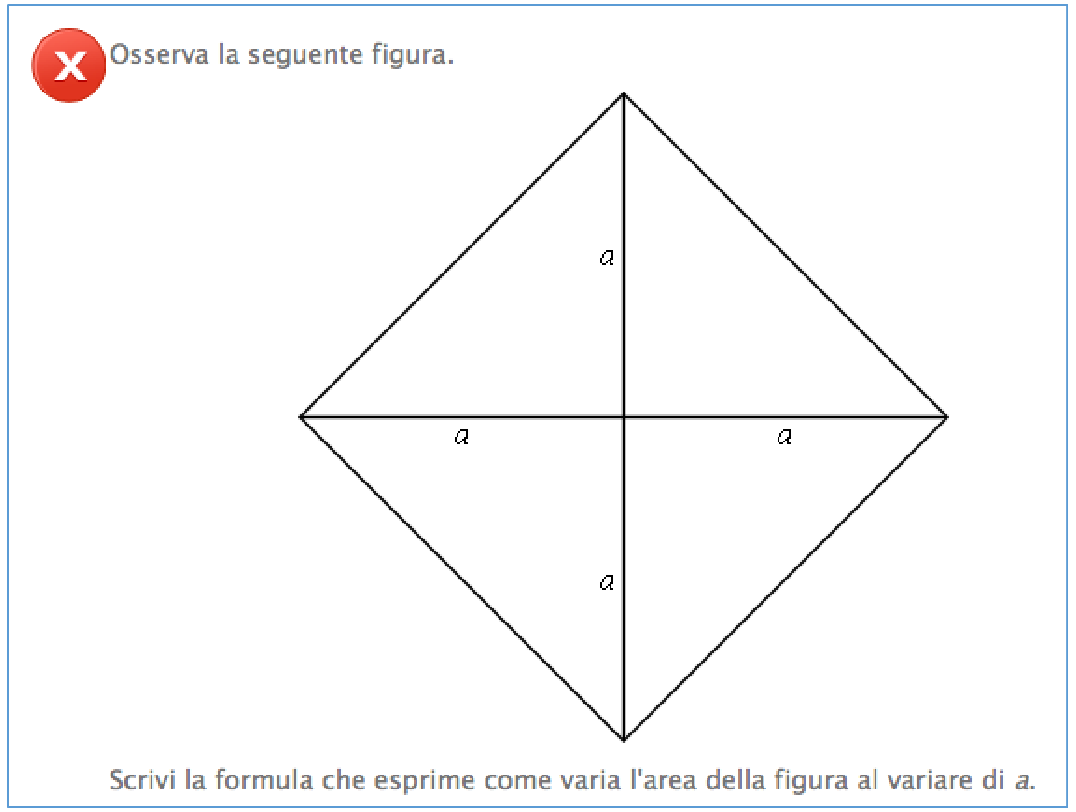
Altri esempi

FIGURA

FORMULA



Scrivi la formula che esprime come varia l’area della figura al variare di c



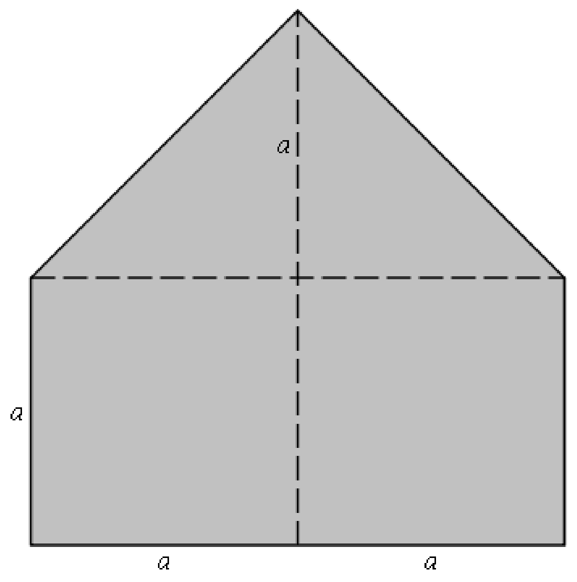
Scrivi la formula che esprime come varia l’area della figura al variare di *a*

Altri esempi

FORMULA

FIGURA

Osserva la seguente figura.



Seleziona tra le formule seguenti tutte quelle che esprimono come varia l'area della figura al variare di *a*.

Seleziona fra le formule seguenti tutte quelle che esprimono come varia l'area della figura al variare di *a*

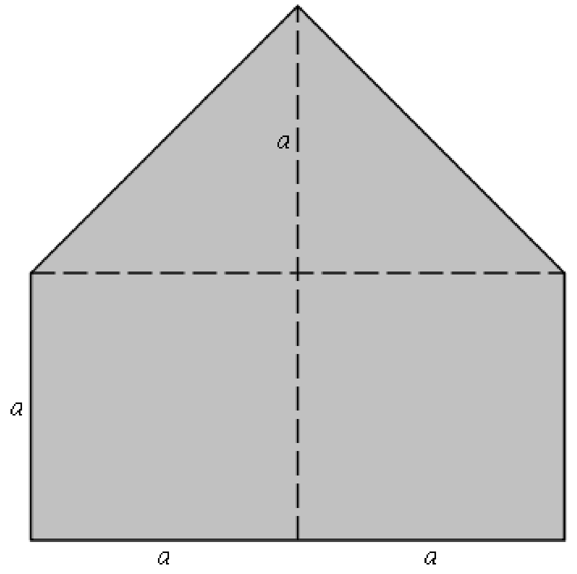
- [ ] $3\,a^2$
- [ ] $(2\,a)^2 - 2\,\frac{a^2}{2}$
- [ ] $\left(a^2 + a^2\right) + \left(\frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1}{2}\,a^2\right)$
- [ ] $4\,a^2 - \frac{1}{2}\,a^2$
- [ ] $2\,a^2 + \frac{2aa}{2}$
- [ ] $2\,\frac{3}{2}\,a^2$
- [ ] $(2\,a)^2 + a^2$

Fase 3. Altri esempi

FORMULA

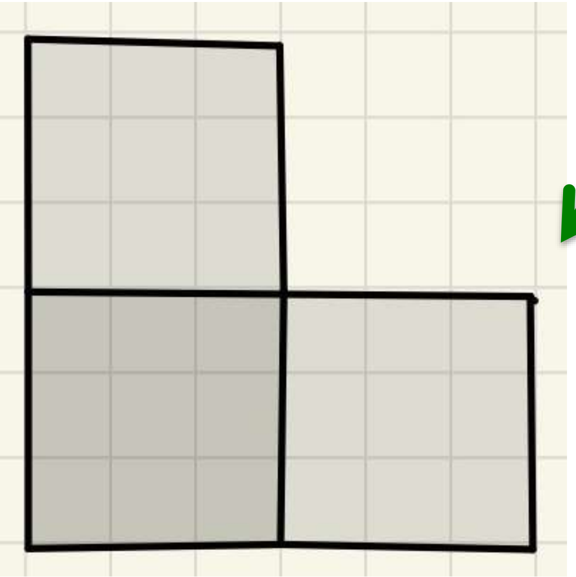
FIGURA

Osserva la seguente figura.



Seleziona tra le formule seguenti tutte quelle che esprimono come varia l'area della figura al variare di *a*.

- $3\,a^2$
- $(2\,a)^2 - 2\,\frac{a^2}{2}$
- $\left(a^2 + a^2\right) + \left(\frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1}{2}\,a^2\right)$
- $4\,a^2 - \frac{1}{2}\,a^2$
- $2\,a^2 + \frac{2aa}{2}$
- $2\,\frac{3}{2}\,a^2$
- $(2\,a)^2 + a^2$



3 quadrati

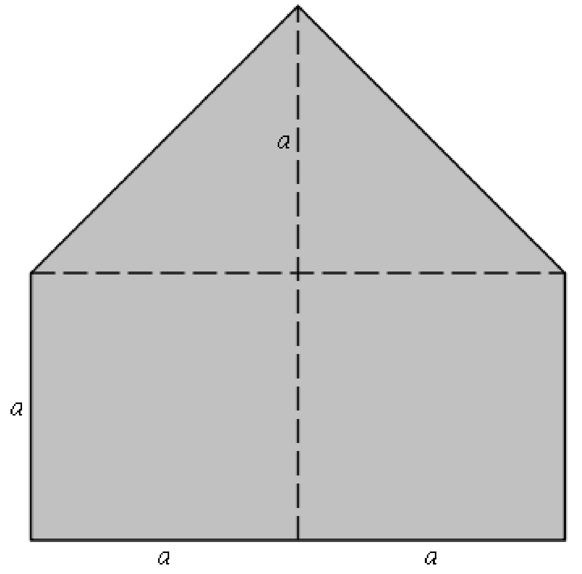
Fase 3. Altri esempi

FORMULA

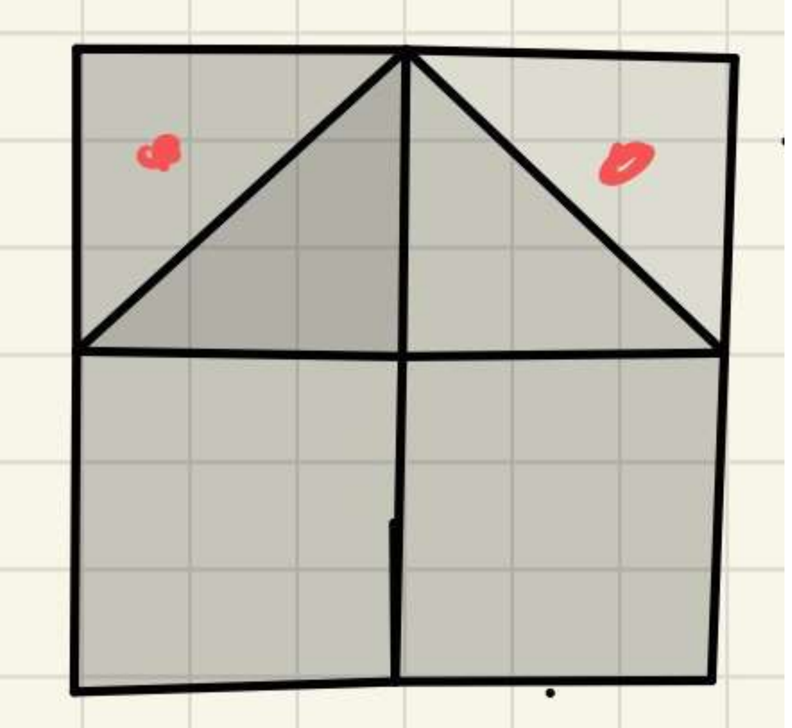
↓

FIGURA

Osserva la seguente figura.



Seleziona tra le formule seguenti tutte quelle che esprimono come varia l'area della figura al variare di *a*.



- ✓ $3a^2$
- ✓ $(2a)^2 - 2\dfrac{a^2}{2}$
- ✓ $\left(a^2 + a^2\right) + \left(\dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{1}{2}a^2\right)$
- ☐ $4a^2 - \dfrac{1}{2}a^2$
- ✓ $2a^2 + \dfrac{2aa}{2}$
- ✓ $2\dfrac{3}{2}a^2$
- ☐ $(2a)^2 + a^2$

Un quadrato meno due mezzi quadrati

Approfondimenti

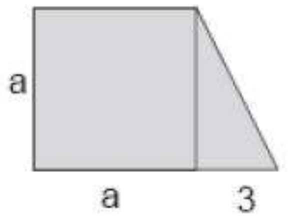
1. Video 2: costanti e variabili
2. Video 3: verso le funzioni

INVALSI

Approfondimento 1. Costanti e variabili

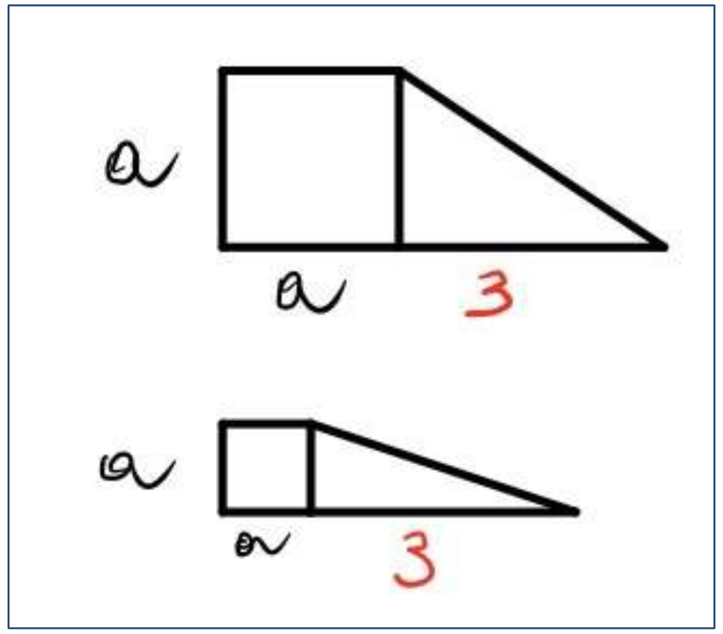
Riprendere la domanda INVALSI

D18. Scrivi la formula che esprime come varia l'area A della figura qui di fianco, al variare della lunghezza a.

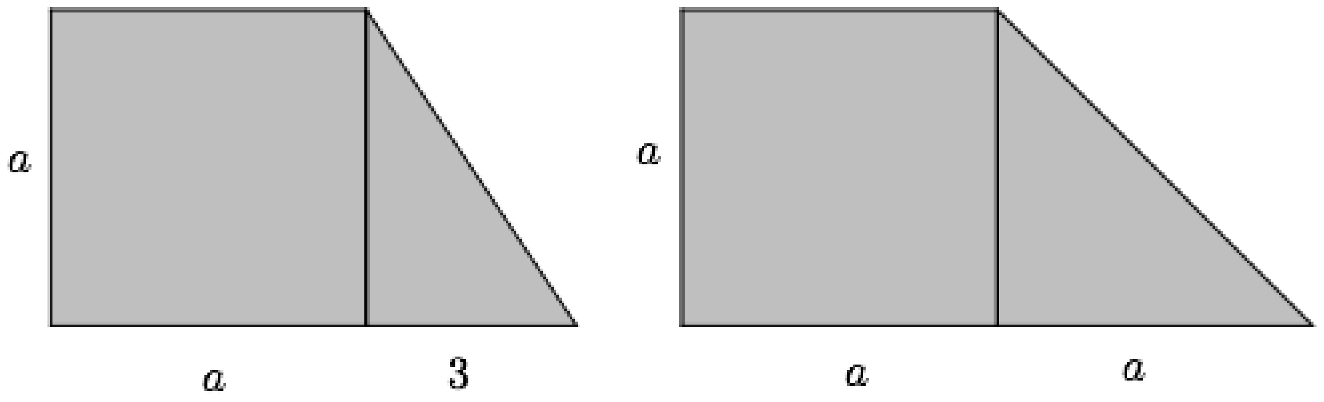


$A =$ ____________________

Come varia la figura al variare di *a*?



Confronto fra due figure per mettere in luce la presenza di costanti e variabili

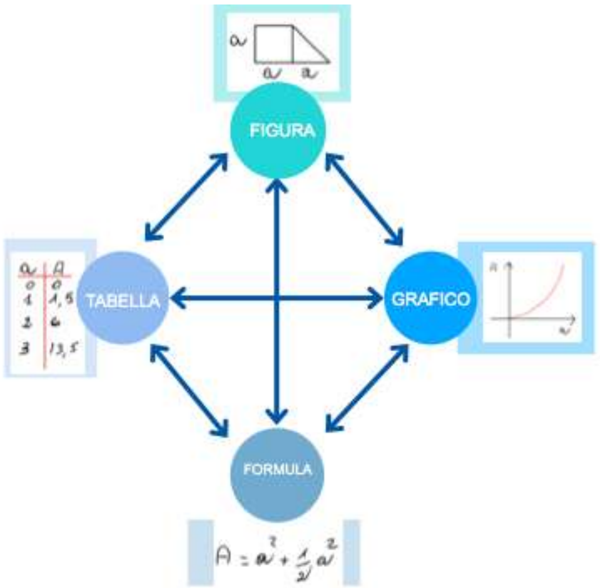


Vai a

APPROFONDIMENTO 1

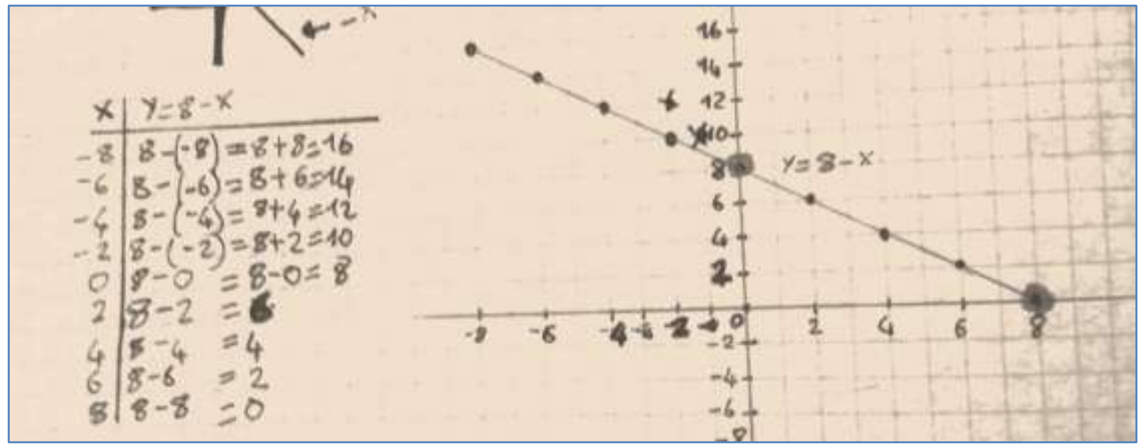
Approfondimento 2. Verso le funzioni

Dalla formula alla tabella e al grafico

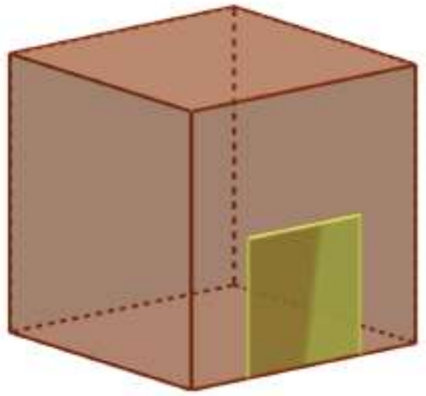


Si abbandona il contesto geometrico: solo formule

Il piano cartesiano si "allarga" ai quattro quadranti e intervengono i numeri negativi



Dalle funzioni alla risoluzione di problemi reali

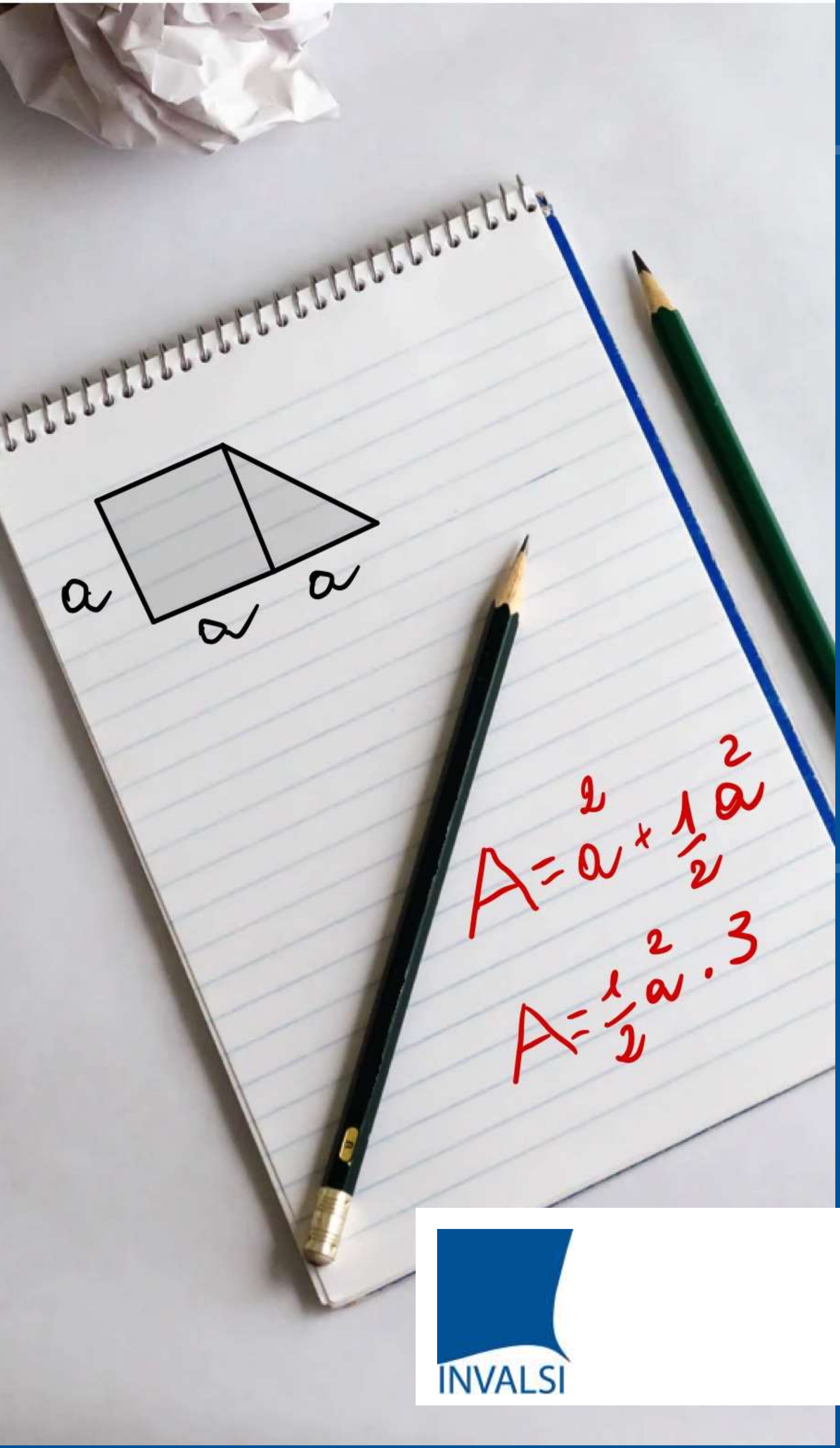


Vai a
APPROFONDIMENTO 2

INVALSI

Ciao Marina!

Vorrei ricordare qua un’insegnante e amica che purtroppo non è più con noi, ma che è stata l’ideatrice e l’anima di questo e altri percorsi didattici: Marina Molinari del Gruppo di Ricerca dell’Università di Genova



GRAZIE ….
e ai prossimi video

INVALSI

INVALSI open
SITO UFFICIALE AREA PROVE NAZIONALI