L’irresistibile propensione per il calcolo

Giorgio Bolondi
Ketty Savioli

“Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo.”

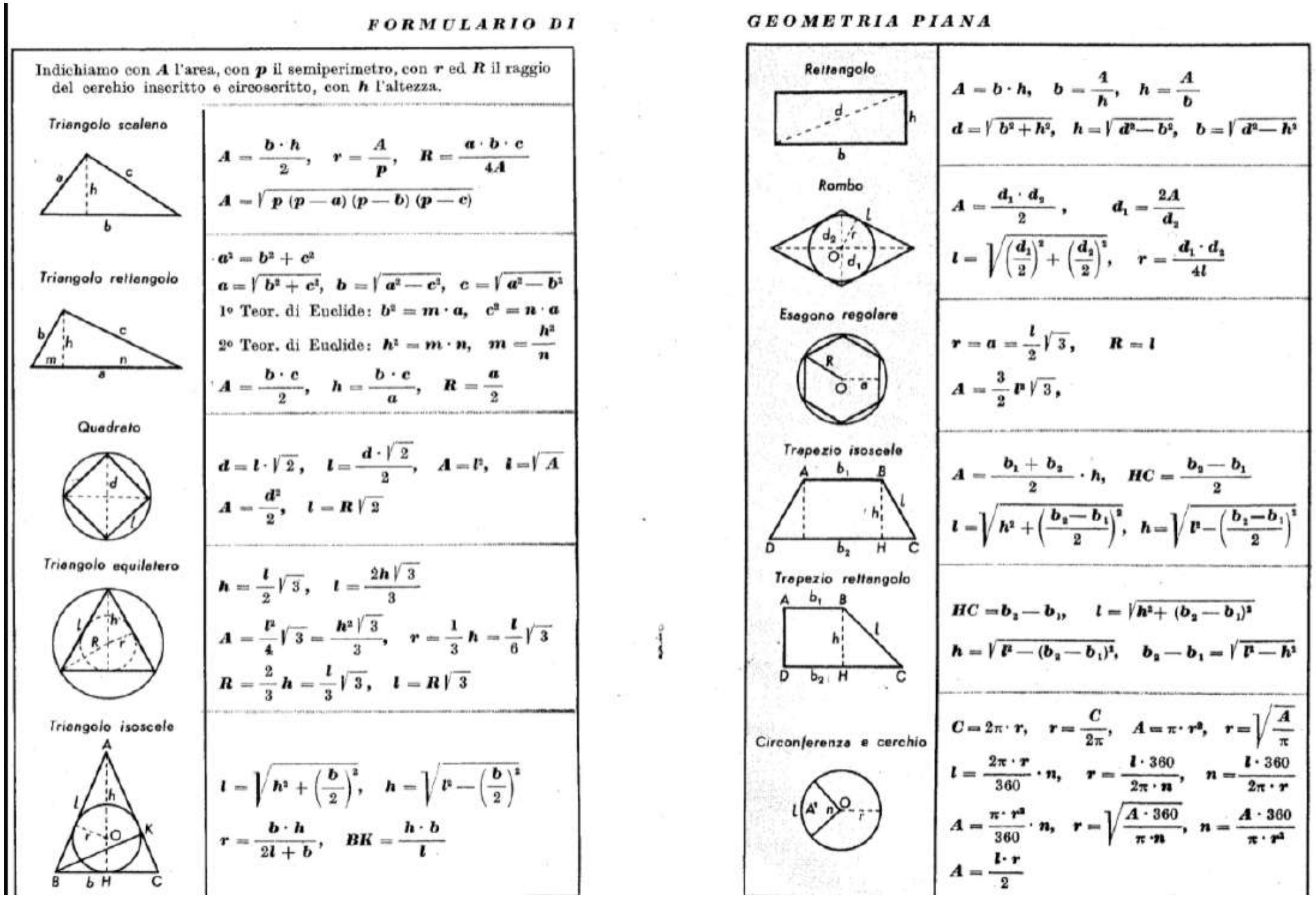
“Determinare l’area di rettangoli e triangoli e di altre figure per scomposizione o utilizzando le più comuni formule”

Indicazioni Nazionali per la Scuola dell’infanzia e il primo ciclo di istruzione, 2012, Traguardi e Obiettivi al termine della Scuola Primaria

Per molti bambini l'area «esiste» solo per le figure per le quali «esiste una formula»

Queste formule costituiscono il nucleo centrale del corpus di «regole» con le quali si identifica spesso la geometria

INVALSI



FORMULARIO DI GEOMETRIA PIANA

Indichiamo con A l'area, con p il semiperimetro, con r ed R il raggio del cerchio inscritto e circoscritto, con h l'altezza.

Triangolo scaleno

$A = \frac{b \cdot h}{2}$, $r = \frac{A}{p}$, $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A}$

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Triangolo rettangolo

$a^2 = b^2 + c^2$

$a = \sqrt{b^2+c^2}$, $b = \sqrt{a^2-c^2}$, $c = \sqrt{a^2-b^2}$

1° Teor. di Euclide: $b^2 = m \cdot a$, $c^2 = n \cdot a$

2° Teor. di Euclide: $h^2 = m \cdot n$, $m = \frac{h^2}{n}$

$A = \frac{b \cdot c}{2}$, $h = \frac{b \cdot c}{a}$, $R = \frac{a}{2}$

Quadrato

$d = l \cdot \sqrt{2}$, $l = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{2}$, $A = l^2$, $l = \sqrt{A}$

$A = \frac{d^2}{2}$, $l = R\sqrt{2}$

Triangolo equilatero

$h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$, $l = \frac{2h\sqrt{3}}{3}$

$A = \frac{l^2}{4}\sqrt{3} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{1}{3}h = \frac{l}{6}\sqrt{3}$

$R = \frac{2}{3}h = \frac{l}{3}\sqrt{3}$, $l = R\sqrt{3}$

Triangolo isoscele

$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$, $h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

$r = \frac{b \cdot h}{2l + b}$, $BK = \frac{h \cdot b}{l}$

Rettangolo

$A = b \cdot h$, $b = \frac{A}{h}$, $h = \frac{A}{b}$

$d = \sqrt{b^2+h^2}$, $h = \sqrt{d^2-b^2}$, $b = \sqrt{d^2-h^2}$

Rombo

$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, $d_1 = \frac{2A}{d_2}$

$l = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$, $r = \frac{d_1 \cdot d_2}{4l}$

Esagono regolare

$r = a = \frac{l}{2}\sqrt{3}$, $R = l$

$A = \frac{3}{2}l^2\sqrt{3}$

Trapezio isoscele

$A = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h$, $HC = \frac{b_2 - b_1}{2}$

$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b_2 - b_1}{2}\right)^2}$, $h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{b_2 - b_1}{2}\right)^2}$

Trapezio rettangolo

$HC = b_2 - b_1$, $l = \sqrt{h^2 + (b_2 - b_1)^2}$

$h = \sqrt{l^2 - (b_2 - b_1)^2}$, $b_2 - b_1 = \sqrt{l^2 - h^2}$

Circonferenza e cerchio

$C = 2\pi \cdot r$, $r = \frac{C}{2\pi}$, $A = \pi \cdot r^2$, $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

$l = \frac{2\pi \cdot r}{360} \cdot n$, $r = \frac{l \cdot 360}{2\pi \cdot n}$, $n = \frac{l \cdot 360}{2\pi \cdot r}$

$A = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot n$, $r = \sqrt{\frac{A \cdot 360}{\pi \cdot n}}$, $n = \frac{A \cdot 360}{\pi \cdot r^2}$

$A = \frac{l \cdot r}{2}$

Per molti allievi la geometria si identifica con un insieme di formule da memorizzare, di «regole», e così rimane nella memoria di molti adulti

Le «regole» e l'insegnamento della matematica (Rosetta Zan)

La geometria a me non piace perché bisogna ricordarsi tutte le formule, calcolarle, disegnare la figura, metterci la base e l'altezza, insomma bisogna ricordarsi tutto. (Alessandro, 5ª primaria)

(…) si applica la memoria a ricordare regole e formule che, a volte, servono nella vita. (Giovanni, 5ª primaria)

L’evoluzione di una espressione

$A = (bxh):2$

Operazioni coi numeri e operazioni con le figure

*L’espressione «base per altezza diviso due» descrive un **procedura**, che viene fissata in una **formula** in cui le lettere hanno una funzione di abbreviazione, prima che di «variabili»*

Vista nella forma 2xA= bxh, esprime in forma simbolica la relazione tra l’area del triangolo e l’area del parallelogramma ottenuto raddoppiando il triangolo, e si riconduce quindi, attraverso operazioni di composizione e scomposizione, all’area del rettangolo

*A= (bxh):2 però, di fatto, diventa una «**macchina**», una scatola nera, in cui si inserisce un input fatto da due numeri e che restituisce un numero come output*

È fondamentale tenere sempre presente che i numeri che vengono inseriti nelle formule e ricavati con le formule non sono semplici numeri, ma MISURE

INVALSI

L'evoluzione di una espressione

A = (bxh):2

Operazioni coi numeri e operazioni con le figure

A questa macchina vengono affiancate altre due «macchine», le formule inverse, che spesso vengono imparate e memorizzate in maniera slegata dalla formula diretta

*In realtà, l'espressione A= (bxh):2 esprime una **relazione tra tre grandezze** associate al triangolo*

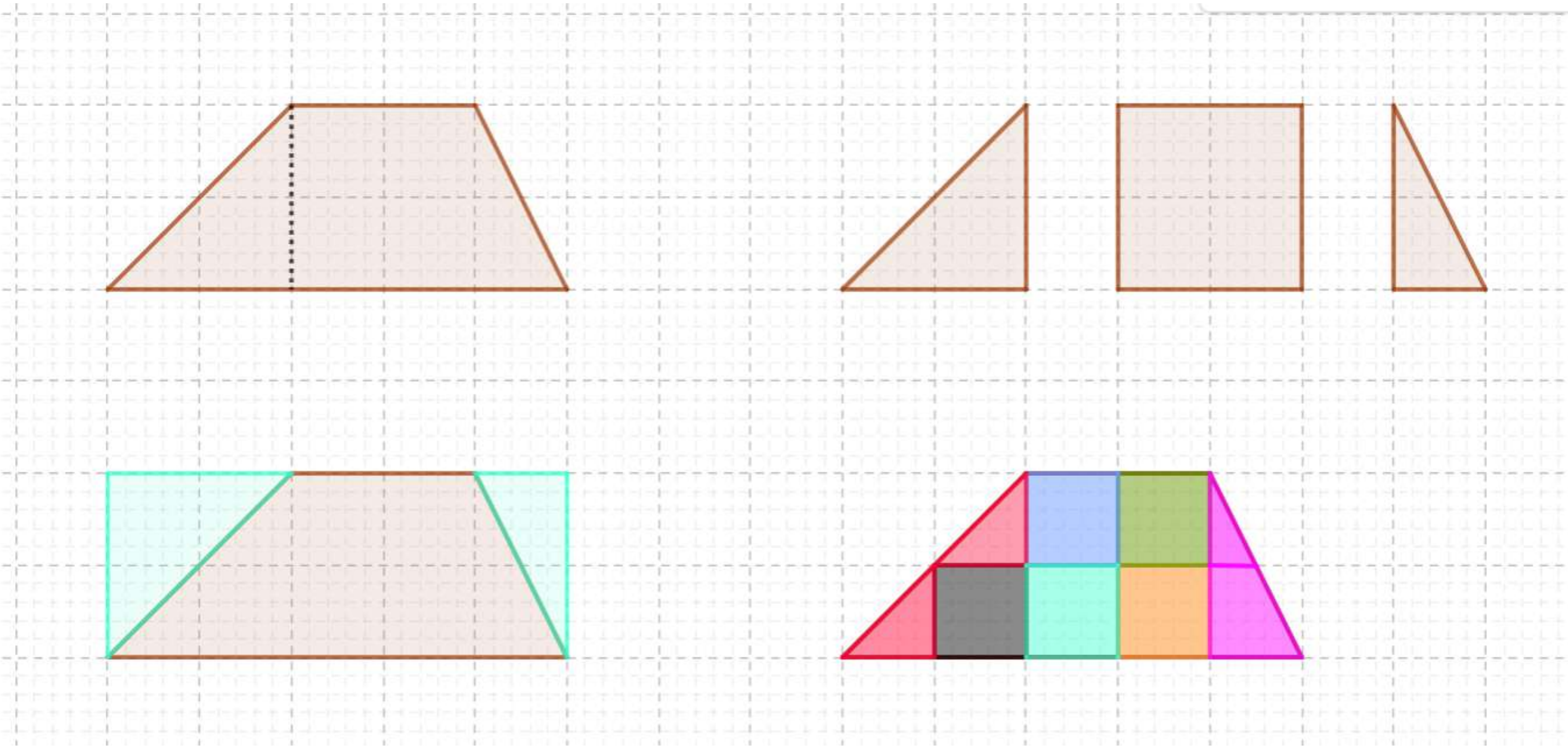
Vista in questa prospettiva, ingloba sia la formula «per l'area» che le formule «inverse»

*Col proseguire del percorso scolastico, la relazione diventa una **relazione funzionale**, che permette di descrivere come varia uno degli elementi al variare degli altri*

È fondamentale tenere sempre presente che i numeri che vengono inseriti nelle formule e ricavati con le formule non sono semplici numeri, ma MISURE

INVALSI

È utile creare situazioni in cui l’area di una figura viene determinata sia attraverso una formula «standard», sia attraverso altre procedure, ad esempio attraverso scomposizione in figure più semplici



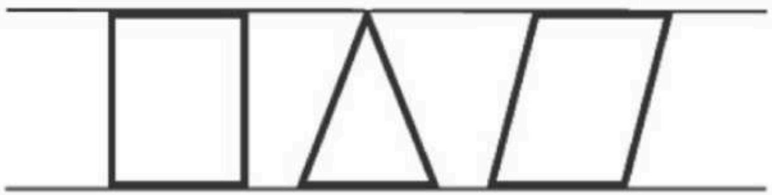
Le formule esprimono una relazione, e quindi possono essere usate come strumento per lavorare con le aree anche senza fare calcoli

Una riflessione sul ruolo delle formule

INVALSI

D19 2010 G05

D19. Su una striscia rettangolare di carta sono stati disegnati un rettangolo, un triangolo e un parallelogramma, tutti con base uguale.

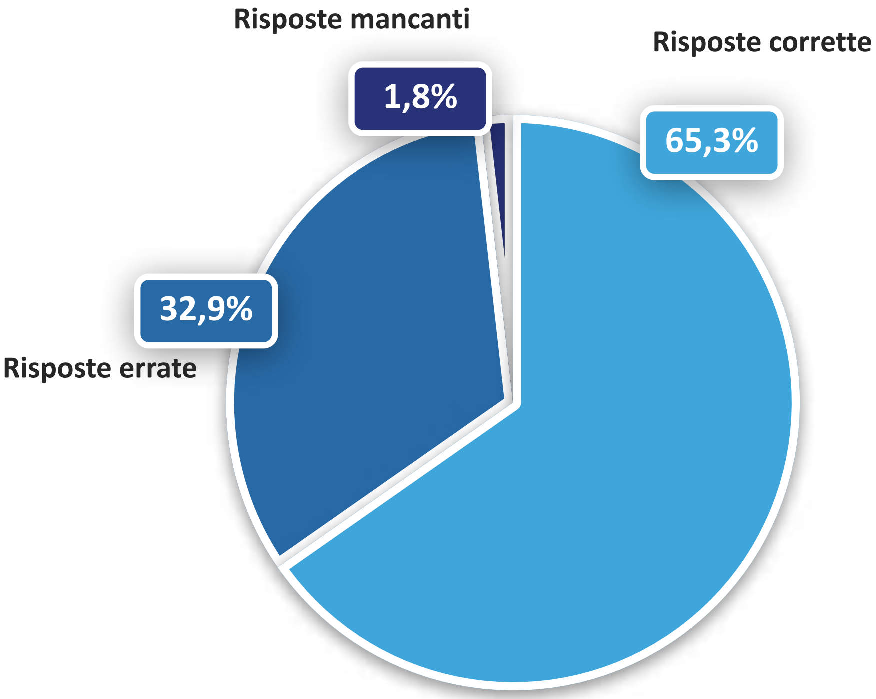


Per ognuna delle seguenti affermazioni indica, mettendo una crocetta nella colonna corrispondente, se è vera o se è falsa.

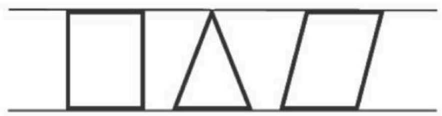
		Vero	Falso
a.	L'area del parallelogramma è il doppio di quella del triangolo	☐	☐
b.	L'area del parallelogramma è maggiore di quella del rettangolo	☐	☐
c.	L'area del triangolo è la metà di quella del rettangolo	☐	☐

Per rispondere devo avere presente le relazioni tra area, base e altezza delle tre figure

Percentuali nazionali item a



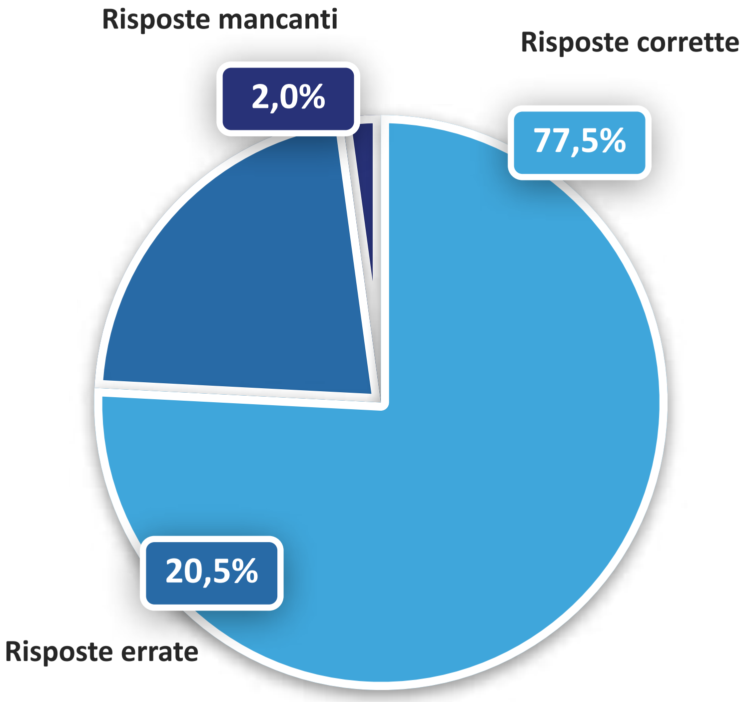
D19. **Su una striscia rettangolare di carta sono stati disegnati un rettangolo, un triangolo e un parallelogramma, tutti con base uguale.**



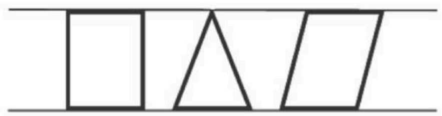
Per ognuna delle seguenti affermazioni indica, mettendo una crocetta nella colonna corrispondente, se è vera o se è falsa.

		Vero	Falso
a.	L'area del parallelogramma è il doppio di quella del triangolo	☐	☐
b.	L'area del parallelogramma è maggiore di quella del rettangolo	☐	☐
c.	L'area del triangolo è la metà di quella del rettangolo	☐	☐

Percentuali nazionali item b



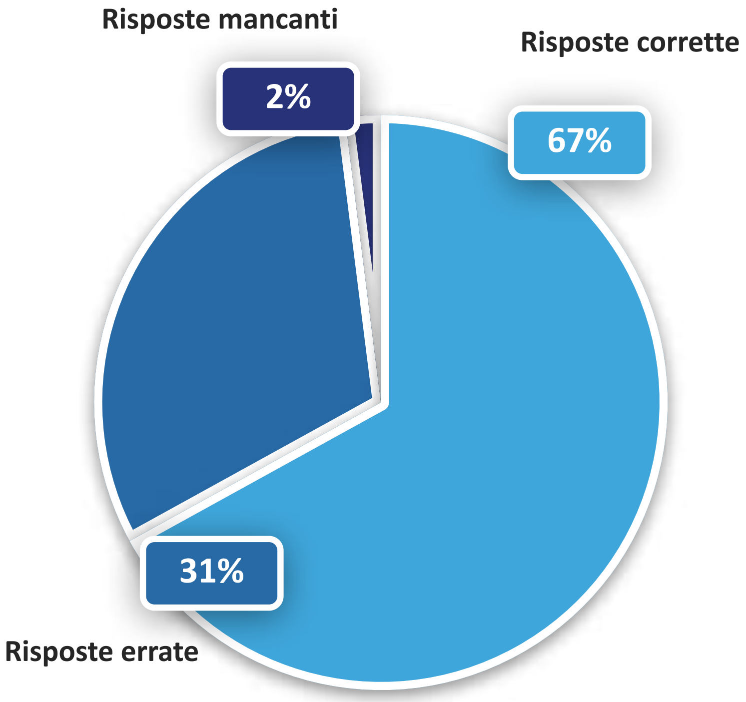
D19. Su una striscia rettangolare di carta sono stati disegnati un rettangolo, un triangolo e un parallelogramma, tutti con base uguale.



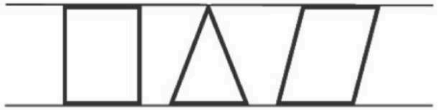
Per ognuna delle seguenti affermazioni indica, mettendo una crocetta nella colonna corrispondente, se è vera o se è falsa.

		Vero	Falso
a.	L'area del parallelogramma è il doppio di quella del triangolo	☐	☐
b.	L'area del parallelogramma è maggiore di quella del rettangolo	☐	☐
c.	L'area del triangolo è la metà di quella del rettangolo	☐	☐

Percentuali nazionali item c



D19. **Su una striscia rettangolare di carta sono stati disegnati un rettangolo, un triangolo e un parallelogramma, tutti con base uguale.**



Per ognuna delle seguenti affermazioni indica, mettendo una crocetta nella colonna corrispondente, se è vera o se è falsa.

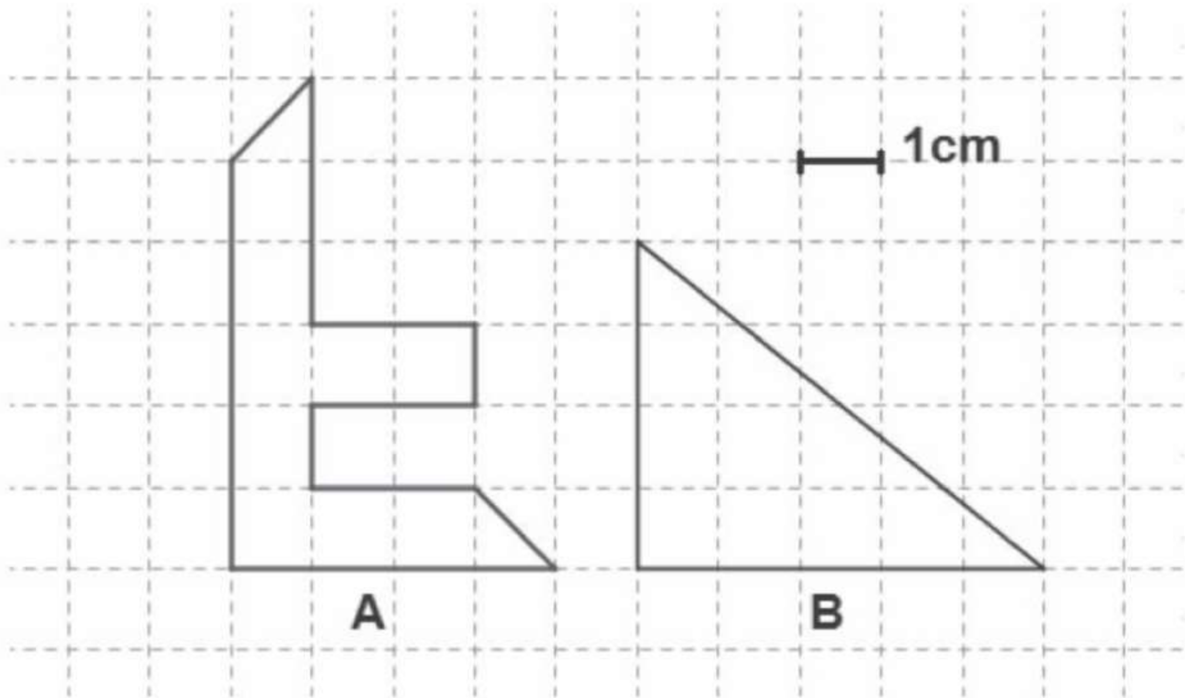
		Vero	Falso
a.	L'area del parallelogramma è il doppio di quella del triangolo	☐	☐
b.	L'area del parallelogramma è maggiore di quella del rettangolo	☐	☐
c.	L'area del triangolo è la metà di quella del rettangolo	☐	☐

Le due figure hanno la stessa area, ma la cosa non è visivamente evidente

Per la figura A la strategia più semplice è il conteggio, nella B la formula

D16 2011 G05

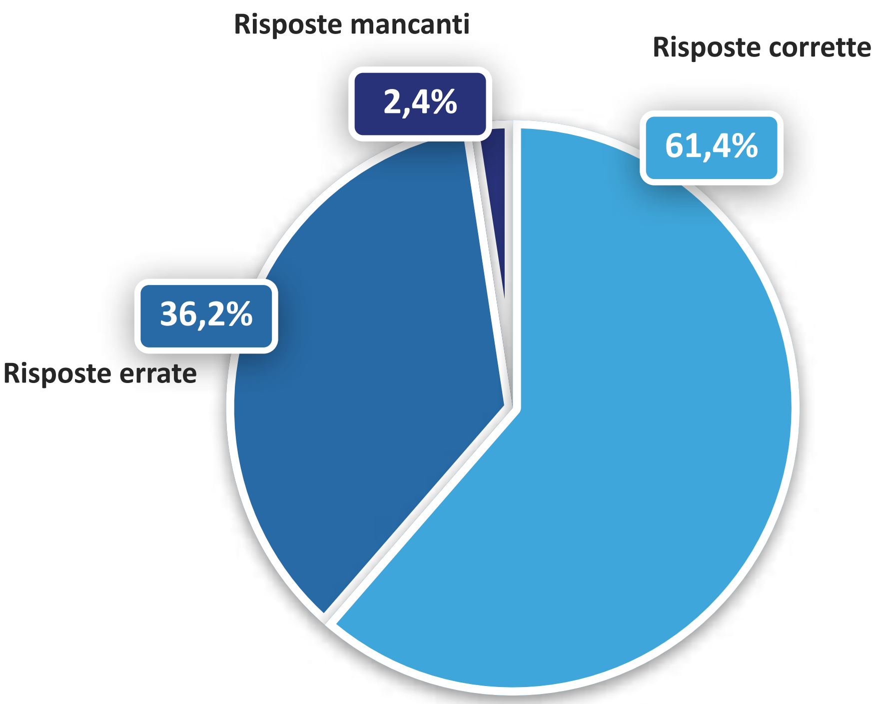
D16. Osserva i seguenti poligoni.



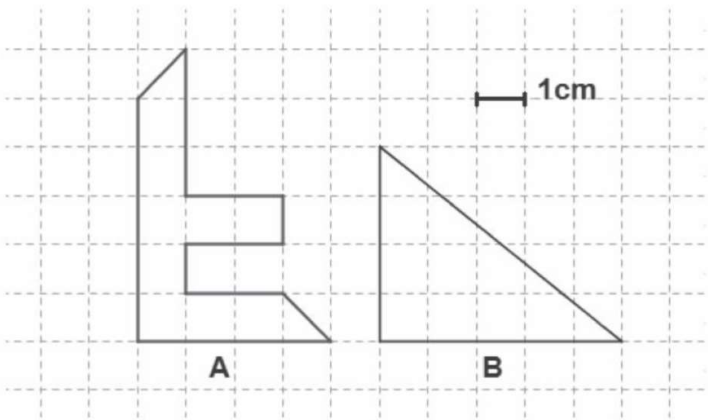
a. **L'area di A misura** .... cm^2.

b. **L'area di B misura** .... cm^2.

Percentuali nazionali item a



D16. Osserva i seguenti poligoni.

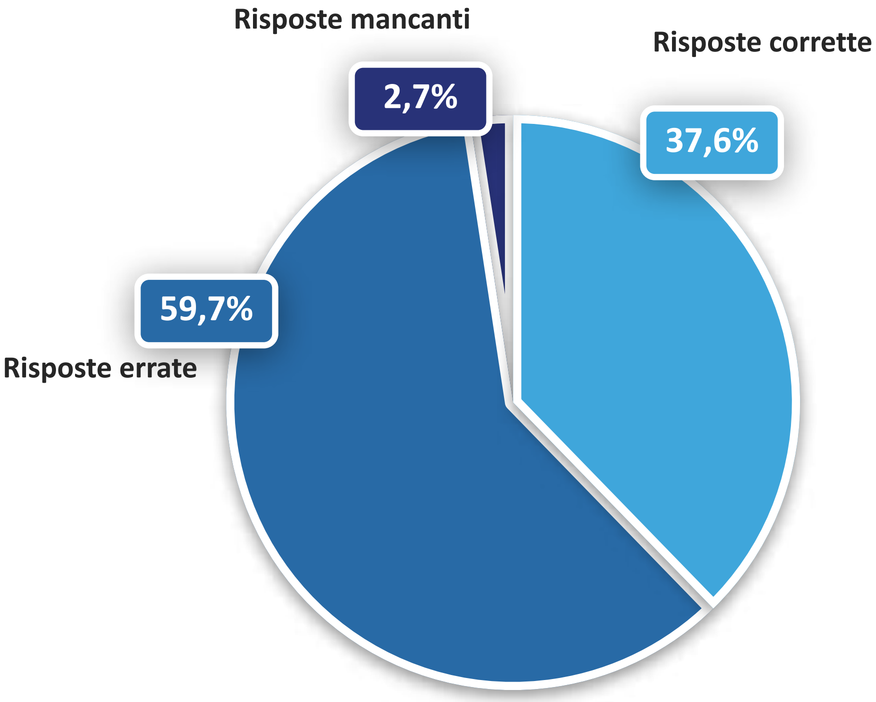


a. **L'area di A misura** .... cm^2.

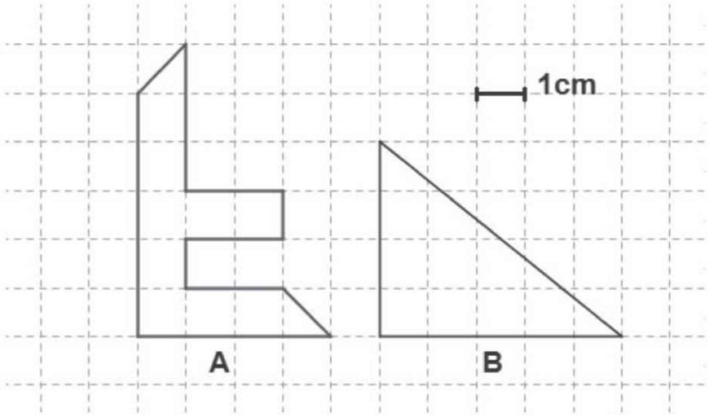
b. **L'area di B misura** .... cm^2.

INVALSI

Percentuali nazionali item b



D16. Osserva i seguenti poligoni.



a. **L'area di A misura** .... cm^2.

b. **L'area di B misura** .... cm^2.

In questo caso l'item a (quello «per conteggio») risulta più facile

D3 2013 G05

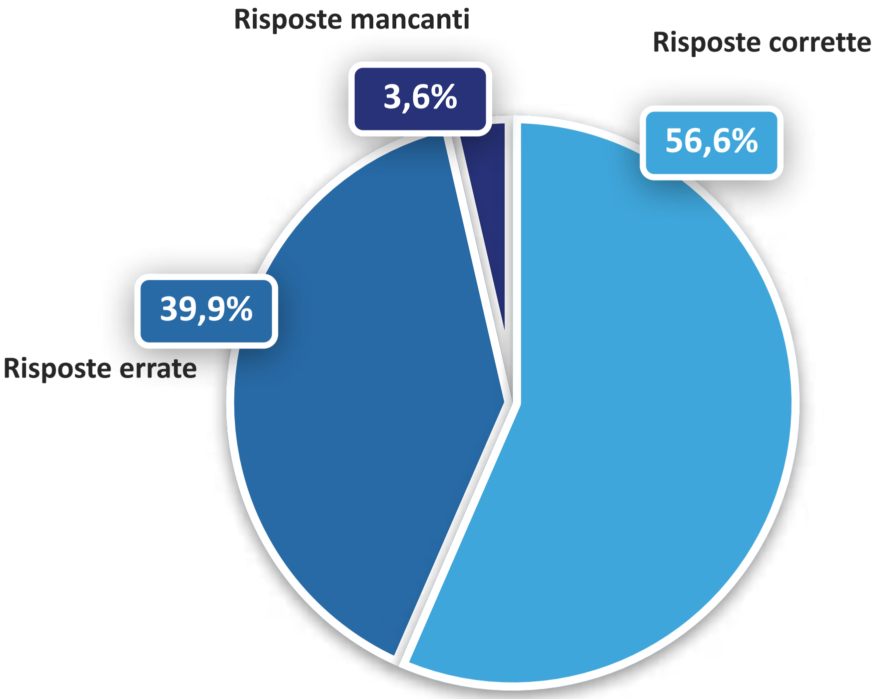
D3. **La superficie del rettangolo 2 è il triplo di quella del rettangolo 1. I lati AB e EF sono uguali e misurano 5 cm. Se BC misura 2 cm, quanto misura FG?**

Rettangolo 1 Rettangolo 2

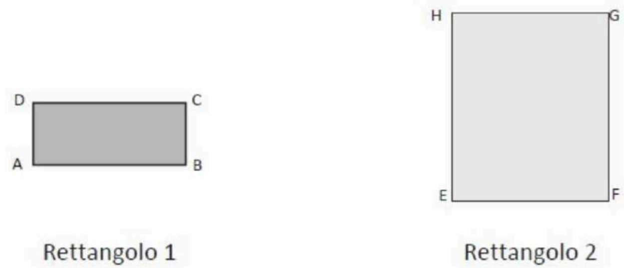
Risposta: ……………………… cm

In questo item è possibile sia argomentare utilizzando la formula come espressione di una relazione, sia calcolare utilizzando le formule, «diretta» e «inversa»

Percentuali nazionali



D3. La superficie del rettangolo 2 è il triplo di quella del rettangolo 1. I lati AB e EF sono uguali e misurano 5 cm. Se BC misura 2 cm, quanto misura FG?



Risposta: ……………………… cm

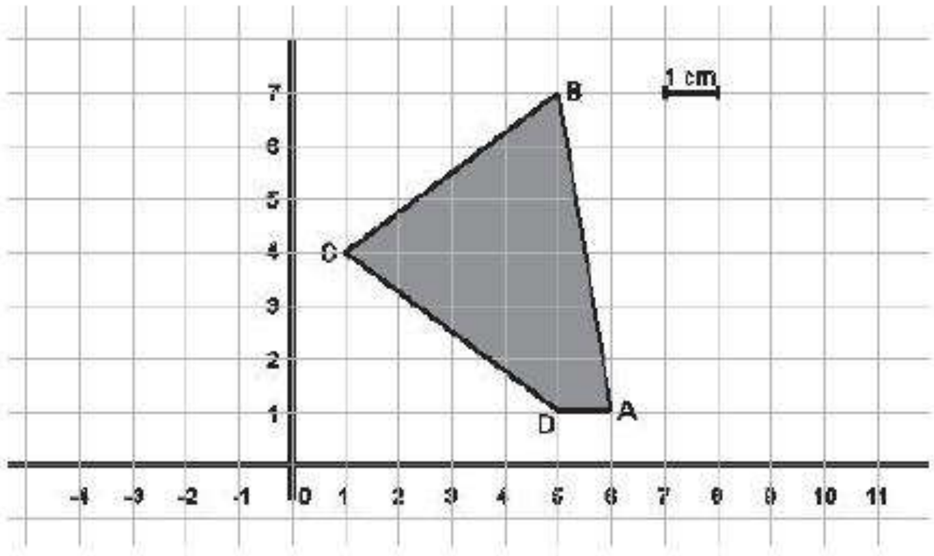
Prestare attenzione alle lettere che si usano nelle formule: all'inizio svolgono una funzione di abbreviazione e di collegamento con gli elementi delle figure in gioco, ma non devono essere usate in maniera acritica e «stereotipata»

Iniziare prima possibile a «giocare» sui collegamenti tra una formula e le sue inverse. La «manipolazione della relazione» non si può ancora avvalere degli strumenti di manipolazione algebrica, ma può appoggiarsi sulle rappresentazioni grafiche delle figure

INVALSI

D18 2011 G10

D18. L'unità di misura riportata sugli assi cartesiani rappresenta 1 cm.

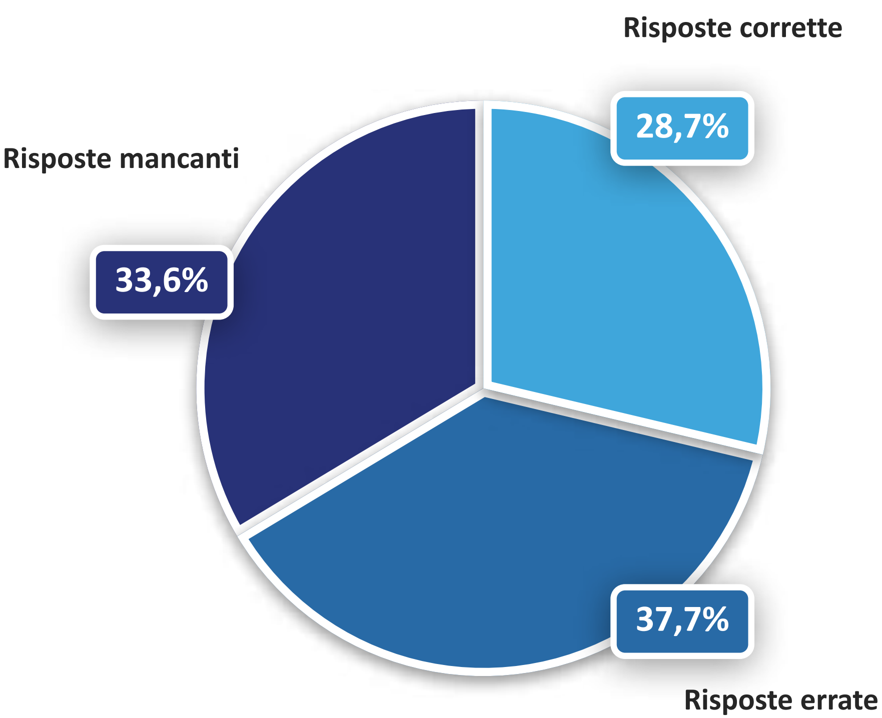


Calcola l'area del quadrilatero ABCD.

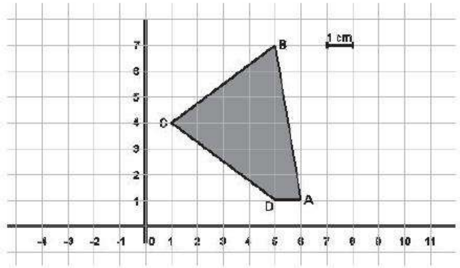
Risposta: .... cm^2

Quando la propensione per il calcolo diventa strutturale: alcune domande di Grado 10

Percentuali nazionali



D18. **L'unità di misura riportata sugli assi cartesiani rappresenta 1 cm.**



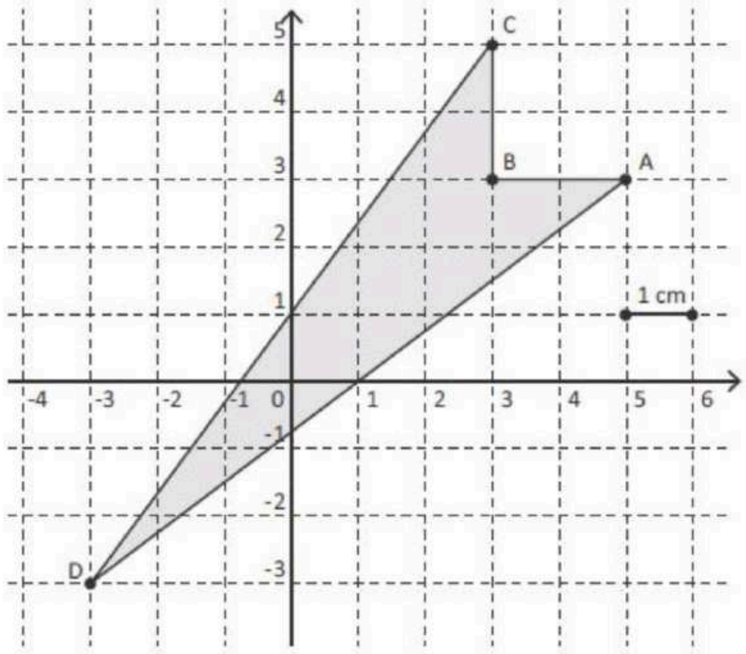
Calcola l'area del quadrilatero ABCD.

Risposta: ………………………………… cm^2

Perché tante risposte mancanti?
Perché tanti allievi non hanno neppure provato a rispondere?

D17 2012 G10

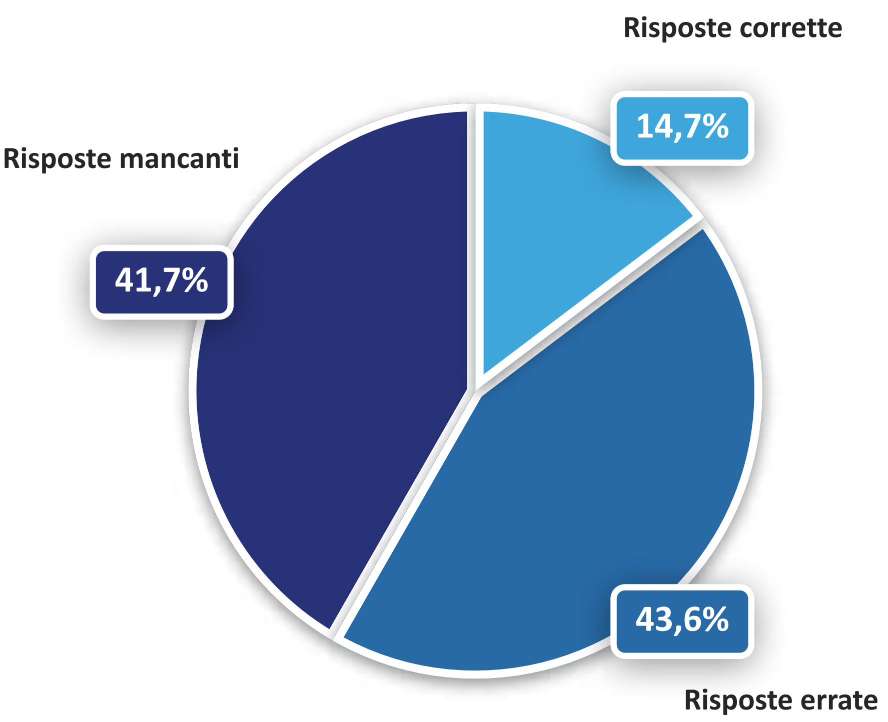
D17. **Calcola l'area del quadrilatero ABCD disegnato in figura.**



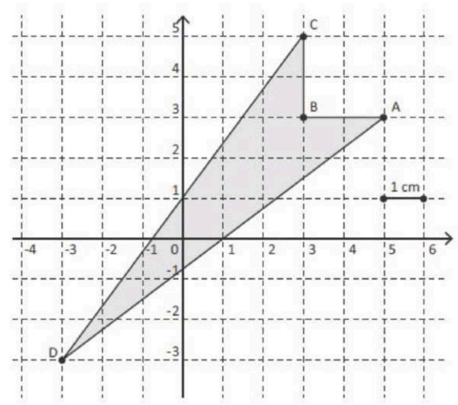
Risposta: .... cm²

Il passaggio attraverso la scomposizione dovrebbe essere naturale e di fatto è difficilmente evitabile

Percentuali nazionali



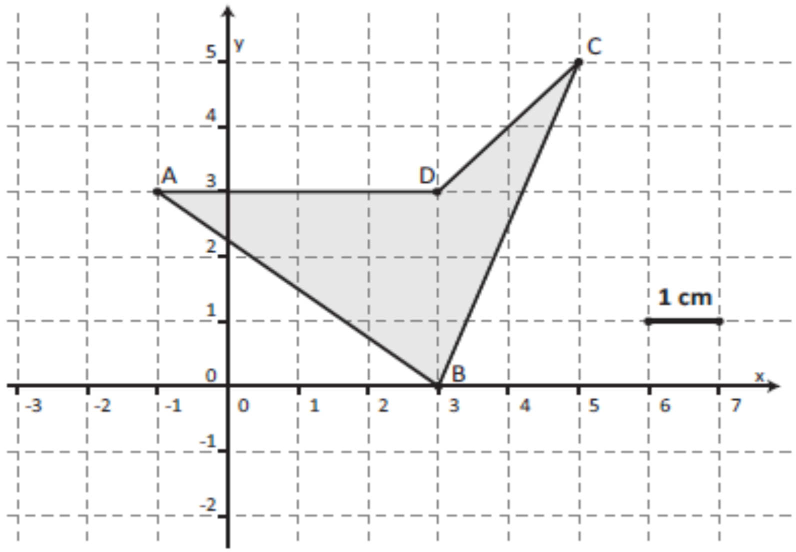
D17. Calcola l'area del quadrilatero ABCD disegnato in figura.



Risposta: .... cm^2

D17 2012 G10

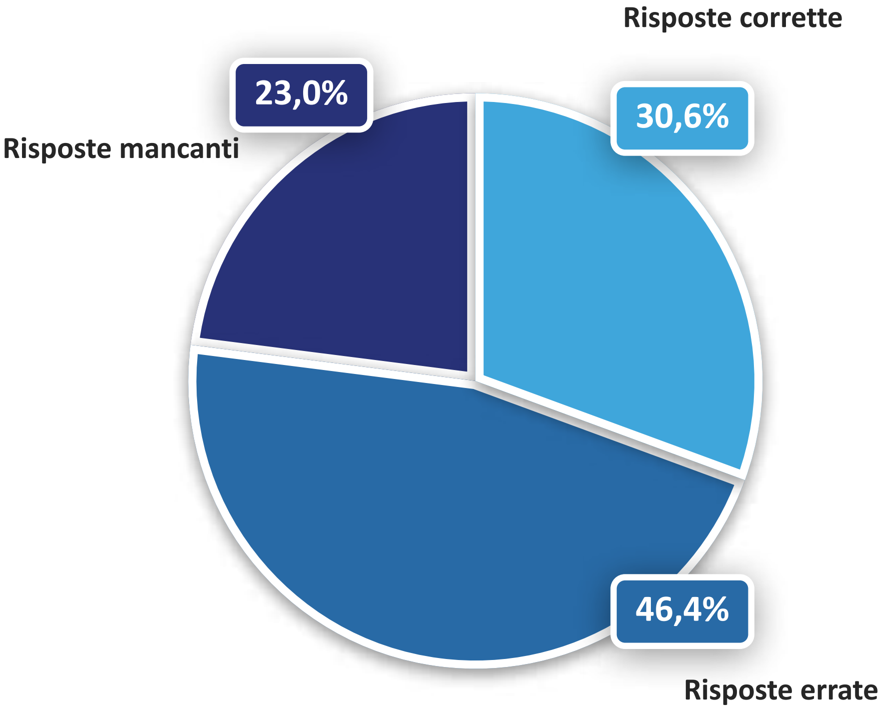
D19. **Qual è l'area del quadrilatero ABCD rappresentato in figura?**



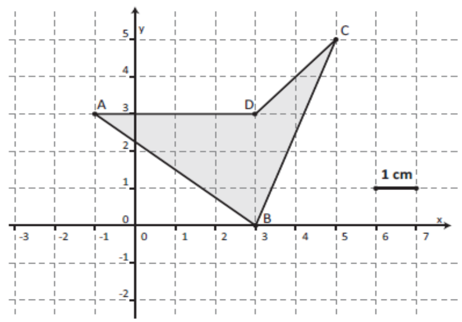
Risposta: .... cm^2

Ma perché succede questo?

Percentuali nazionali

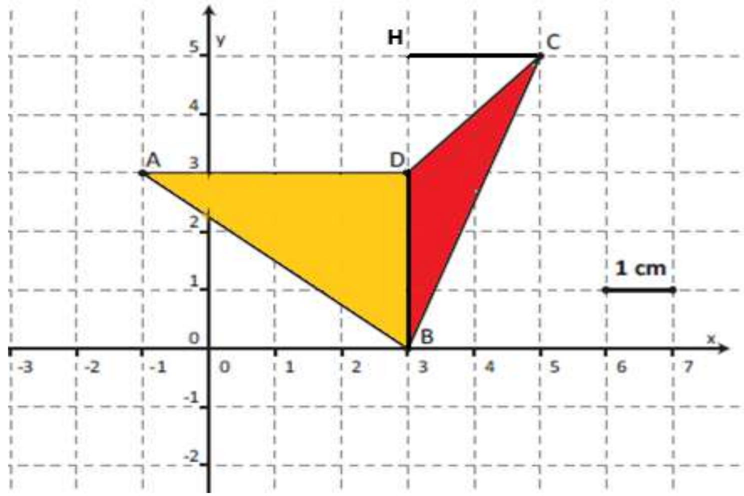


D19. **Qual è l'area del quadrilatero ABCD rappresentato in figura?**



Risposta: .... cm^2

Possibili strategie risolutive, da esplorare con gli allievi della scuola primaria

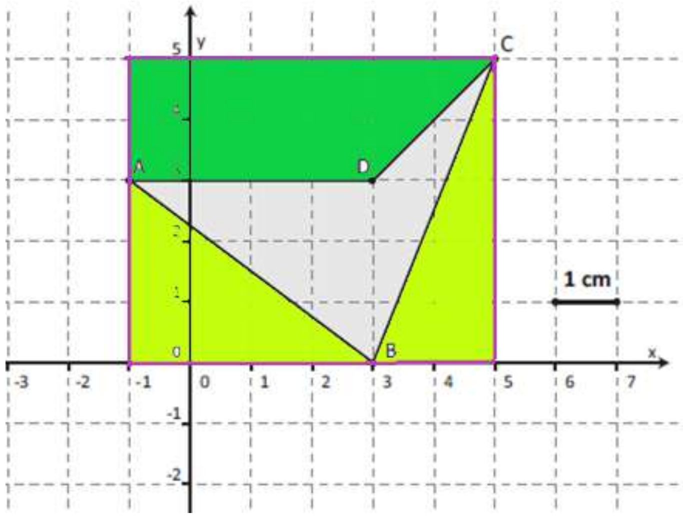


Area ABD $\frac{4 \cdot 3}{2}\ cm^2 = 6\ cm^2$

Area BCD $\frac{3 \cdot 2}{2}\ cm^2 = 3\ cm^2$

Area ABCD $6\ cm^2 + 3\ cm^2 = 9\ cm^2$

Possibili strategie risolutive, da esplorare con gli allievi della scuola primaria



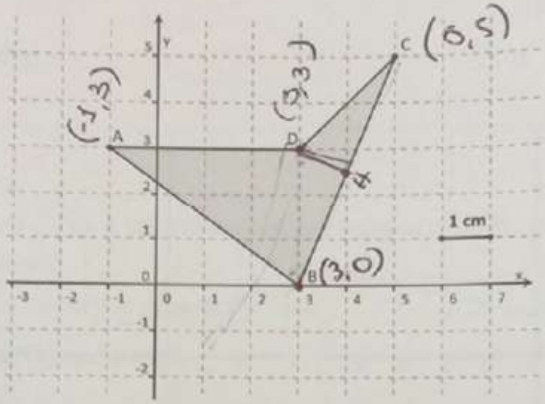
Area rettangolo $5 \cdot 6\ cm^2 = 30\ cm^2$

Area figure colorate $\left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right) + \left(\frac{5 \cdot 2}{2}\right) + \left(\frac{(6+4) \cdot 2}{2}\right) cm^2 = 21\ cm^2$

Area ABCD $30\ cm^2 - 21\ cm^2 = 9\ cm^2$

INVALSI

Le strategie risolutive degli studenti di scuola secondaria



NO

Risposta: ...12... cm²

$AD = |-1-3| = 4$

$DB = |0-3| = 3$

$A_{ABD} = \frac{AD \cdot BD}{2} = 6$

$CB = \sqrt{(5-3)^2+(2-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$AD \rightarrow y = 3$

$BC \rightarrow \begin{cases} 0 = 3m+q \\ 5 = 5m+q \end{cases}$ $\quad -5 = -2m \quad m = \frac{5}{2}$ $\quad \begin{cases} m = \frac{5}{2} \\ 0 = 3 \cdot \frac{5}{2} + q \end{cases}$ $\begin{cases} m = \frac{5}{2} \\ q = -\frac{15}{2} \end{cases}$

$y = \frac{5}{2}x - \frac{15}{2}$

$DH \perp BC$

$m_{DH} = -\frac{2}{5}$

$y - y_0 = -\frac{2}{5}(x - x_0)$

$y - 3 = -\frac{2}{5}(x-3)$

$y - 3 = -\frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$

$y = -\frac{2}{5}x + \frac{21}{5}$

(H) $\begin{cases} y = \frac{5}{2}x - \frac{15}{2} \\ y = -\frac{2}{5}x + \frac{21}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{2}{5}x + \frac{21}{5} = \frac{5}{2}x - \frac{15}{2} \\ y = \frac{5}{2}x - \frac{15}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{-4x+42-25x+75}{\cancel{10}} = 0 \\ y = \frac{5}{2}x - \frac{15}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} -29x = 117 \\ y = \frac{5}{2}x - \frac{15}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{117}{29} \\ y = \frac{5}{2} \cdot \frac{117}{29} - \frac{15}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{117}{29} \\ y = \frac{585-435}{58} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{117}{29} \\ y = \frac{75}{29} \end{cases}$

MAT10F3

$DH = \sqrt{\left(\frac{117}{29}-3\right)^2 + \left(\frac{75}{29}-3\right)^2} = \sqrt{\frac{900}{841} + \frac{144}{841}} = \sqrt{\frac{1044}{841}} = \frac{6}{29}\sqrt{29}$ (17)

$A_{BCD} = \frac{DH \cdot BC}{2} = 6$

$A_{ABCD} = 6 + 6 = 12$

INVALSI

Le strategie risolutive degli studenti di scuola secondaria

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(-1-3)^2+(3)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

retta AB $\Rightarrow \dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A} \Rightarrow \dfrac{y-3}{0-3}=\dfrac{x+1}{3+1} \Rightarrow \dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{x+1}{4}$

$\Rightarrow 4y-12=-3x-3 \Rightarrow 3x+4y=+9$

altezza $_{A\hat{B}D}$ $\Rightarrow \dfrac{|3\cdot3+4\cdot3-9|}{\sqrt{25}}=\dfrac{|9+12-9|}{5}=\dfrac{12}{5}$

$D(3;3)$

$$\text{Area}_{A\hat{B}D}=\cancel{5}^{1}\cdot\frac{\cancel{12}^{6}}{\cancel{5}_{1}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}=6$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{(3-5)^2+(-5)^2}=\sqrt{2^2+25}=\sqrt{29}$$

retta $_{BC}$ $\Rightarrow \dfrac{y-y_C}{y_B-y_C}=\dfrac{x-x_C}{x_B-x_C} \Rightarrow \dfrac{y-5}{-5}=\dfrac{x-5}{3-5} \Rightarrow -2(y-5)=-5x+25$

$\Rightarrow -2y+10=-5x+25 \Rightarrow -2y+5x-15=0$

altezza $_{B\hat{D}C}$ $\Rightarrow \dfrac{|5\cdot3-2\cdot3-15|}{\sqrt{29}}=\dfrac{|15-6-15|}{\sqrt{29}}=\dfrac{6}{\sqrt{29}}$

$$\text{Area}_{B\hat{D}C}=\cancel{\sqrt{29}}\cdot\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{\sqrt{29}}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}=3$$

$$\Rightarrow \text{Area}_{ADCB}=6+3=9$$

INVALSI

Un possibile percorso didattico

Lavorare a gruppi su un triangolo «vero», in cui possono essere già state disegnate le altezze, e determinarne l'area scegliendo di volta in volta un lato diverso come base. Per i più grandicelli, utilizzando anche la formula di Erone.

Ci sono differenze tra i risultati trovati?

A cosa possono essere dovute?

Qual è l'area «vera» del triangolo?