

Dal linguaggio verbale al linguaggio simbolico

Un percorso dalla Primaria alla
Secondaria guidato dalle prove INVALSI

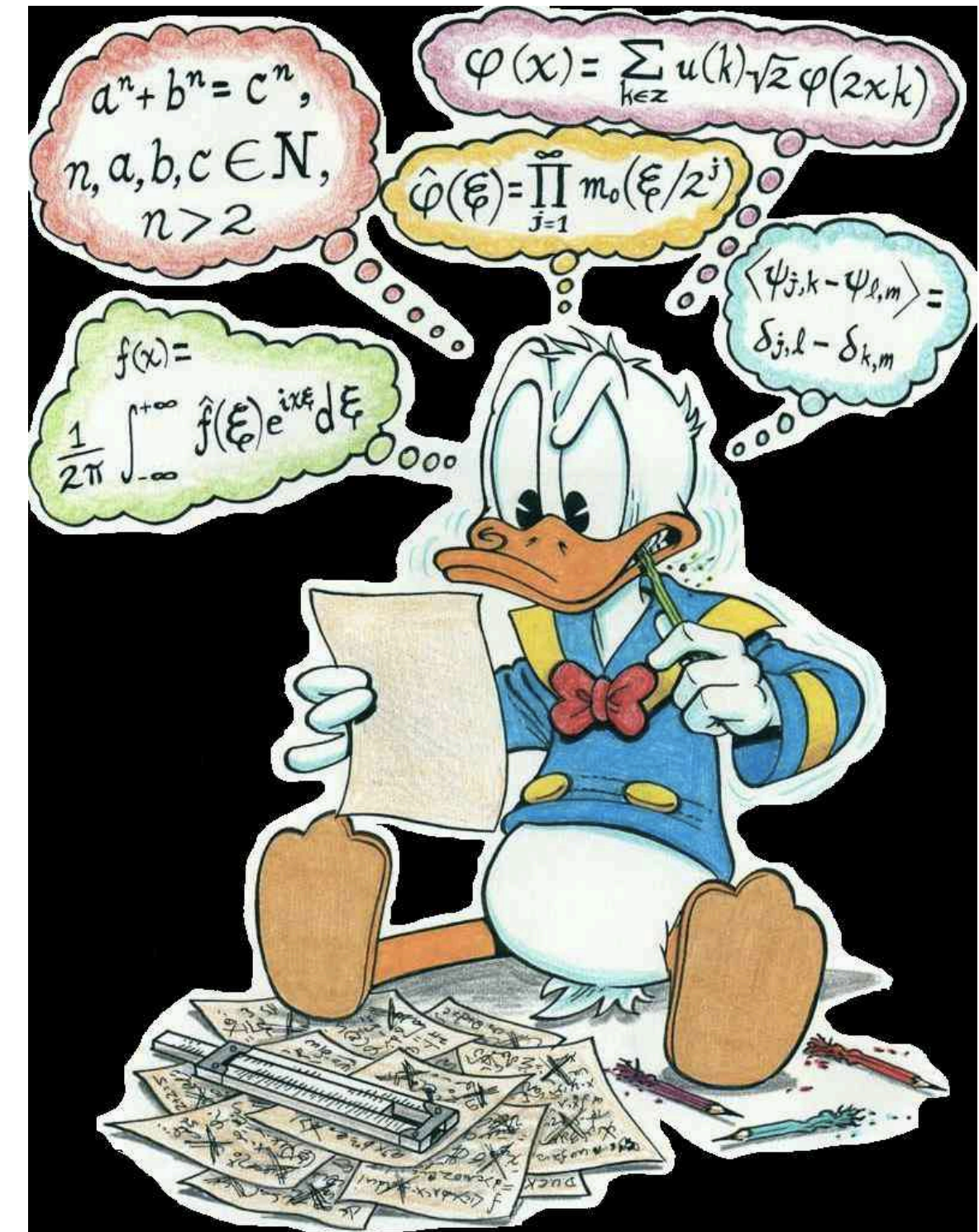
10 febbraio 2021

Rossella Garuti
Andrea Maffia
Nicoletta Noli

L'algebra nel senso comune

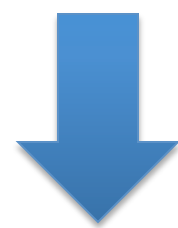
"... NON CI VUOLE MICA L'ALGEBRA!!!!"

"... Ma per me questo è ALGEBRA!!!!"



La ricerca in didattica ci descrive le difficoltà degli studenti in questo campo.

L'esperienza didattica ci dice che, nonostante il tempo che ci si dedica, le difficoltà permangono.

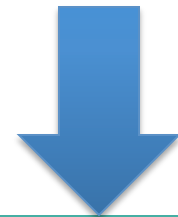


Troppo spesso la manipolazione formale dei segni non è accompagnata da consapevolezza sui simboli usati.



L'algebra a scuola

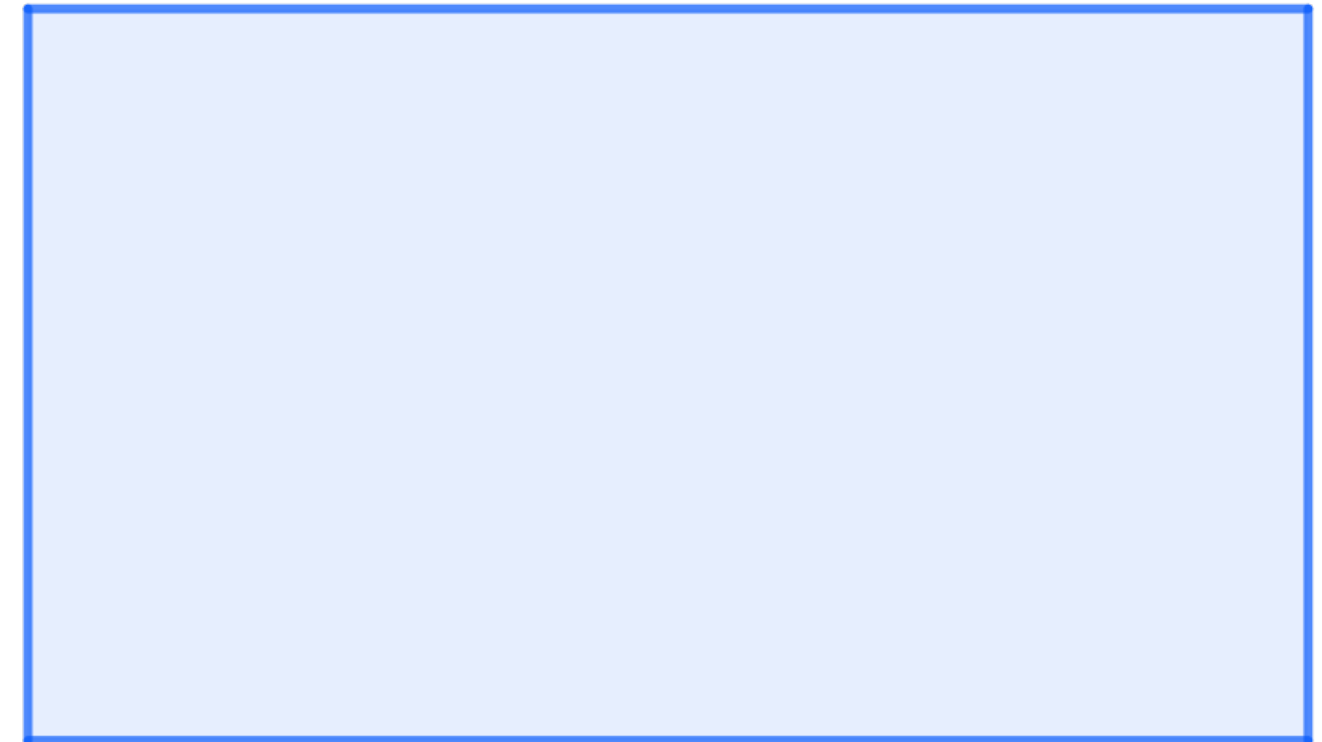
Algebra come
strumento di
pensiero



- per scoprire e descrivere relazioni fra grandezze
- per produrre congetture e costruire dimostrazioni

L'area del rettangolo: un problema

Si consideri un rettangolo qualunque.
Cosa succede alla sua area, se una delle sue dimensioni è diminuita del 10% e l'altra è aumentata del 10%?



Symbol sense:

informal sense-making in formal mathematics

A. Arcavi (1994). *For the Learning of Mathematics* 14(3), 24-35

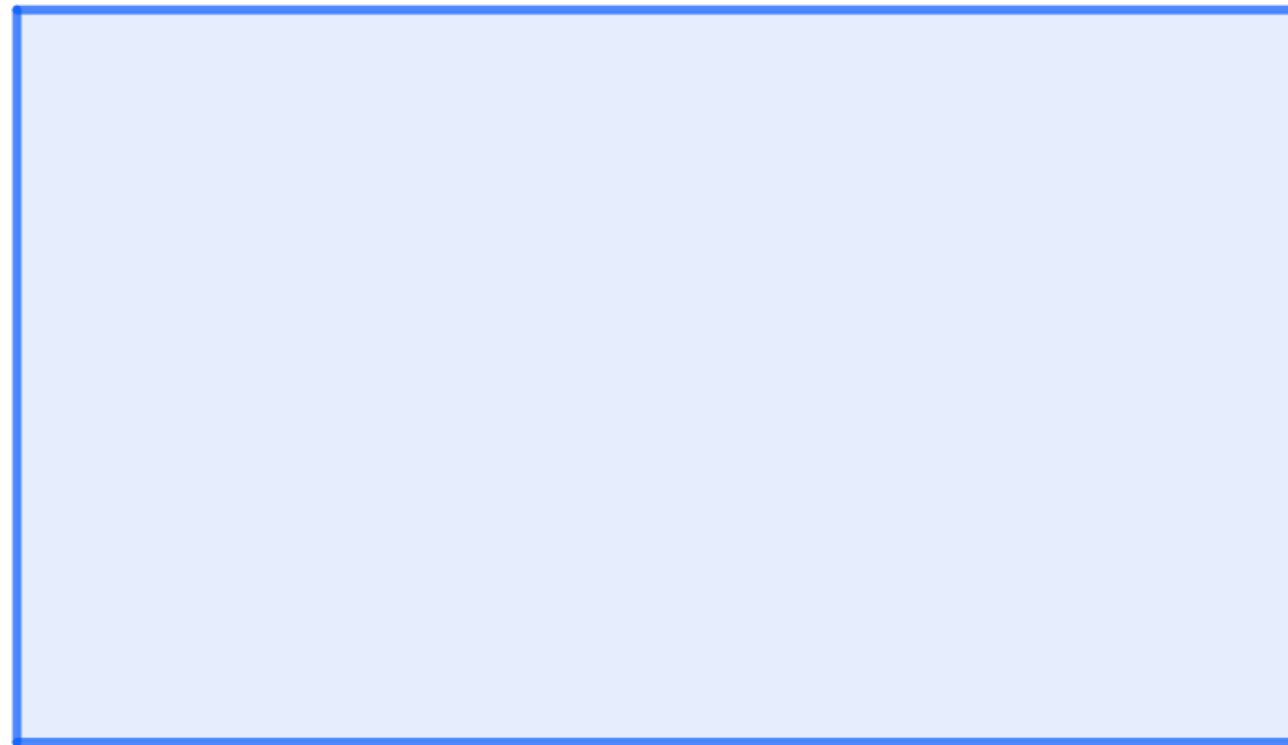
IL POTERE DEI SIMBOLI

L'area rimane la stessa,
visto che i lati calano e
crescono nello stesso
modo

L'area cambia, però
dipende da quale
dimensione
diminuisce o aumenta

Se faccio delle prove
con i numeri sembra
che l'area diminuisca.
Ma diminuisce
sempre? Boh!





b

$$Area = 1,1a \cdot 0,9b = 0,99ab$$

$$0,99ab < ab$$

a

Cosa ci dice la risoluzione algebrica?

- ✓ L'area diminuisce sempre
- ✓ Il risultato non dipende da quale delle due dimensioni è aumentata o diminuita
- ✓ **0.99ab** rappresenta non solo la *soluzione*, ma anche la *spiegazione* del perché è sempre valida

DI COSA PARLEREMO?

■ **1.Aspetti linguistici e relazionali** nel passaggio dal linguaggio verbale al linguaggio simbolico

■ **2.Espressioni equivalenti, significati diversi:** per un apprendimento “sensato” dell'algebra

■ **3.Considerazioni finali:** nodi didattici e indicazioni curriculari



UNO SFONDO COMUNE

Apprendimento a spirale: nell'ottica della costruzione di un curriculum verticale dalla primaria alla secondaria di II grado

Esempi dalle **prove INVALSI** come spunto per una riflessione e individuazione dei principali nodi di questo argomento



1. Aspetti linguistici e relazionali nel passaggio dal linguaggio verbale a quello simbolico

Un esempio famoso

“In questa università ci sono sei volte più studenti che professori”
Scrivi un’equazione usando le variabili S e P per rappresentare l’enunciato. [Clement, 1982]

In un esperimento con studenti di ingegneria ben il 30% di loro commette un errore, a causa di una traduzione dal linguaggio naturale al linguaggio simbolico parola per parola.

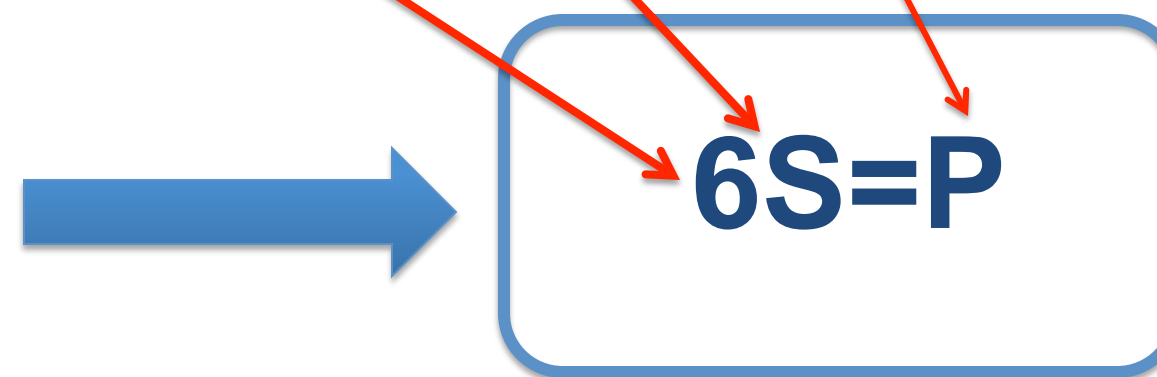


$$6S=P$$

Un problema famoso

“Ci sono sei volte più studenti che professori in questa università”
Scrivi un’equazione usando le variabili S e P per rappresentare il
questo enunciato. [Clement, 1982]

In un esperimento con studenti di ingegneria ben il 30% di loro commette questo errore, a causa di una traduzione dal linguaggio naturale al linguaggio simbolico parola per parola.

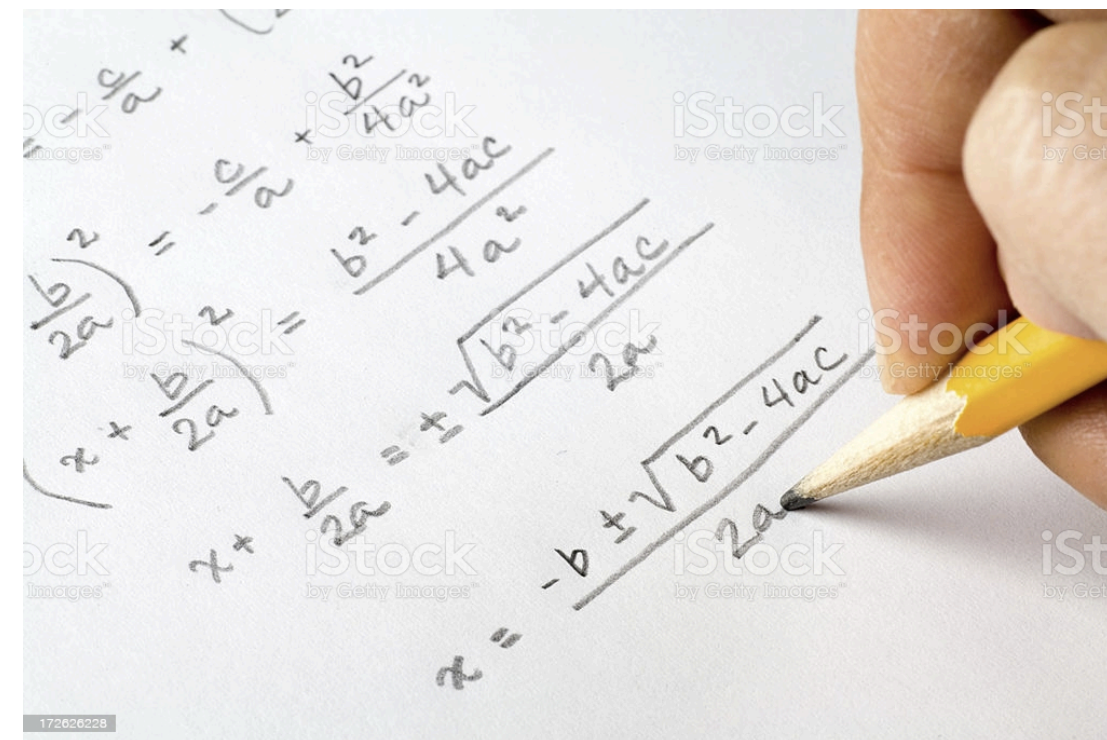

$$6S=P$$

Una premessa necessaria....



ARITMETICA

early algebra



ALGEBRA





QUESITO D8_2009 G02

8. Carlo pensa un numero, **aggiunge** 26 e ottiene 41.

Chi tra Matteo, Laura e Chiara indovina il numero che Carlo ha pensato?

☐ A. Matteo



☒ B. Laura

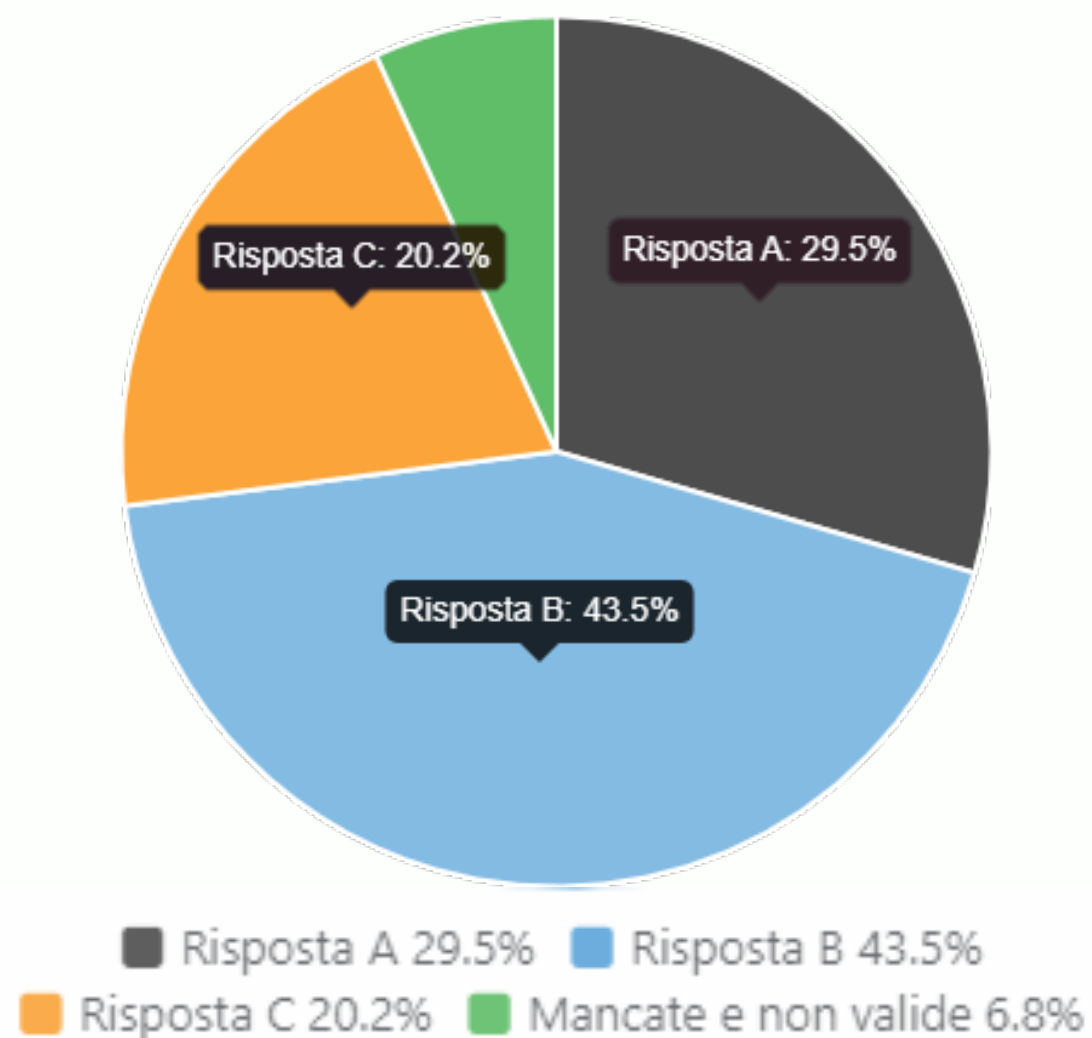


☐ C. Chiara



- Aspetti linguistici
- Operazione inversa

QUESITO D8_2009 G02



8. Carlo pensa un numero, aggiunge 26 e ottiene 41.

Chi tra Matteo, Laura e Chiara indovina il numero che Carlo ha pensato?

☐ A. Matteo



☒ B. Laura



☐ C. Chiara





QUESITO D18_2013 G05

D18. La maestra assegna ai suoi alunni questo compito: pensate due numeri diversi fra loro e sommate al più piccolo il doppio del più grande.

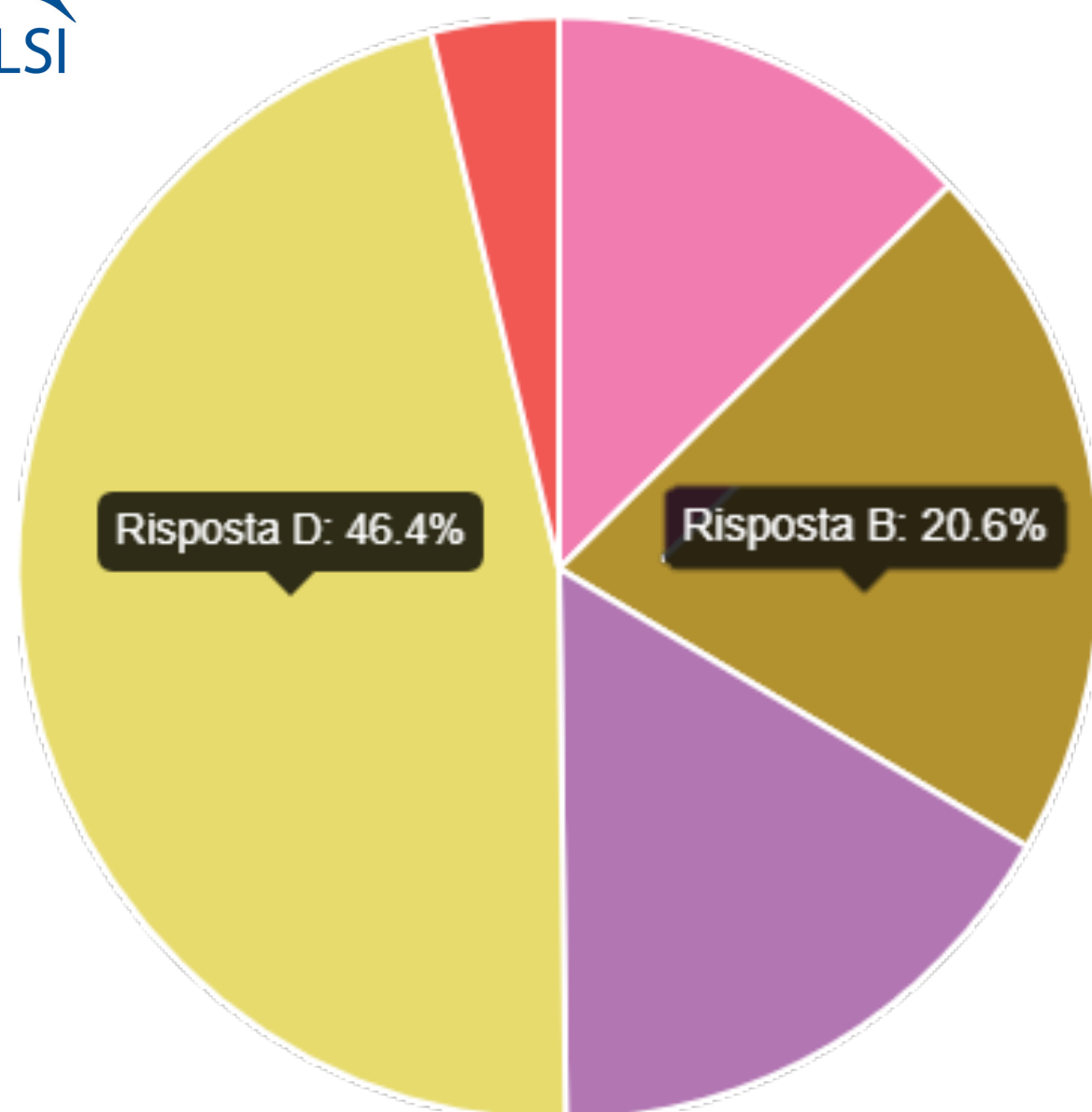
Se Riccardo chiama a il numero più piccolo e b quello più grande, come può scrivere il calcolo assegnato dalla maestra?

- A. ☐ $2 \times a + 2 \times b$
- B. ☐ $2 \times a + b$
- C. ☐ $a \times b \times 2$
- D. ☒ $a + 2 \times b$

- relazioni fra grandezze
- simboli algebrici

QUESITO D18b_2013 G05

Risultati



■ Risposta A 12.8% ■ Risposta B 20.6%
■ Risposta C 16.4% ■ Risposta D 46.4%
■ Mancate e non valide 3.8%

b. Se Riccardo chiama a il numero più piccolo e b quello più grande, come può scrivere il calcolo assegnato dalla maestra?

A. ☐ $2 \times a + 2 \times b$

B. ☐ $2 \times a + b$

C. ☐ $a \times b \times 2$

D. ☒ $a + 2 \times b$

PRETEST_2018 G08 CBT

Domanda

Roberto ha 4 macchinine **più di Francesco**

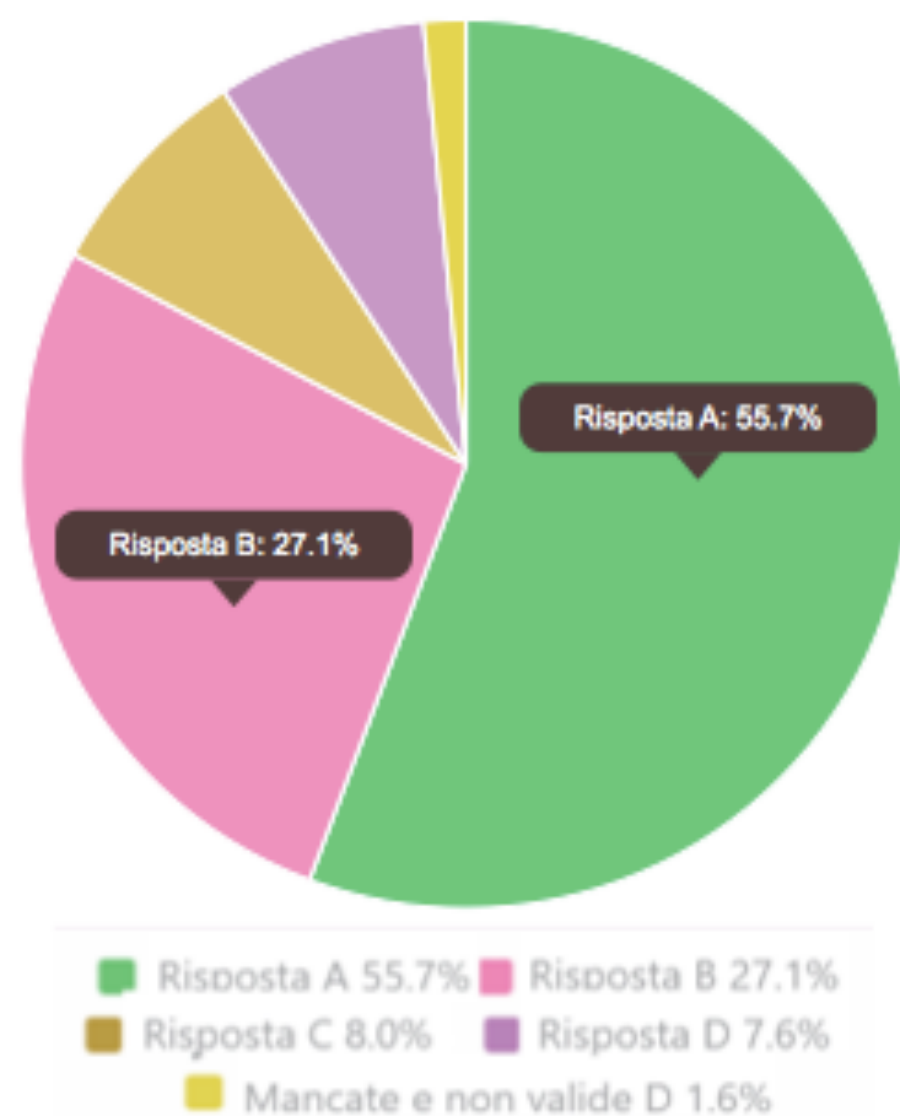
La lettera n rappresenta il numero di macchinine di Roberto.

Quale espressione rappresenta il numero di macchinine di Francesco?

Per rispondere clicca su una delle alternative.

- A ☒ $n - 4$
- B ☐ $n + 4$
- C ☐ $4 - n$
- D ☐ $4n$

- Aspetti linguistici
- Operazione inversa



Domanda

Roberto ha 4 macchinine più di Francesco.

La lettera n rappresenta il numero di macchinine di Roberto.

Quale espressione rappresenta il numero di macchinine di Francesco?

Per rispondere clicca su una delle alternative.

- A ☒ $n - 4$
- B ☐ $n + 4$
- C ☐ $4 - n$
- D ☐ $4n$

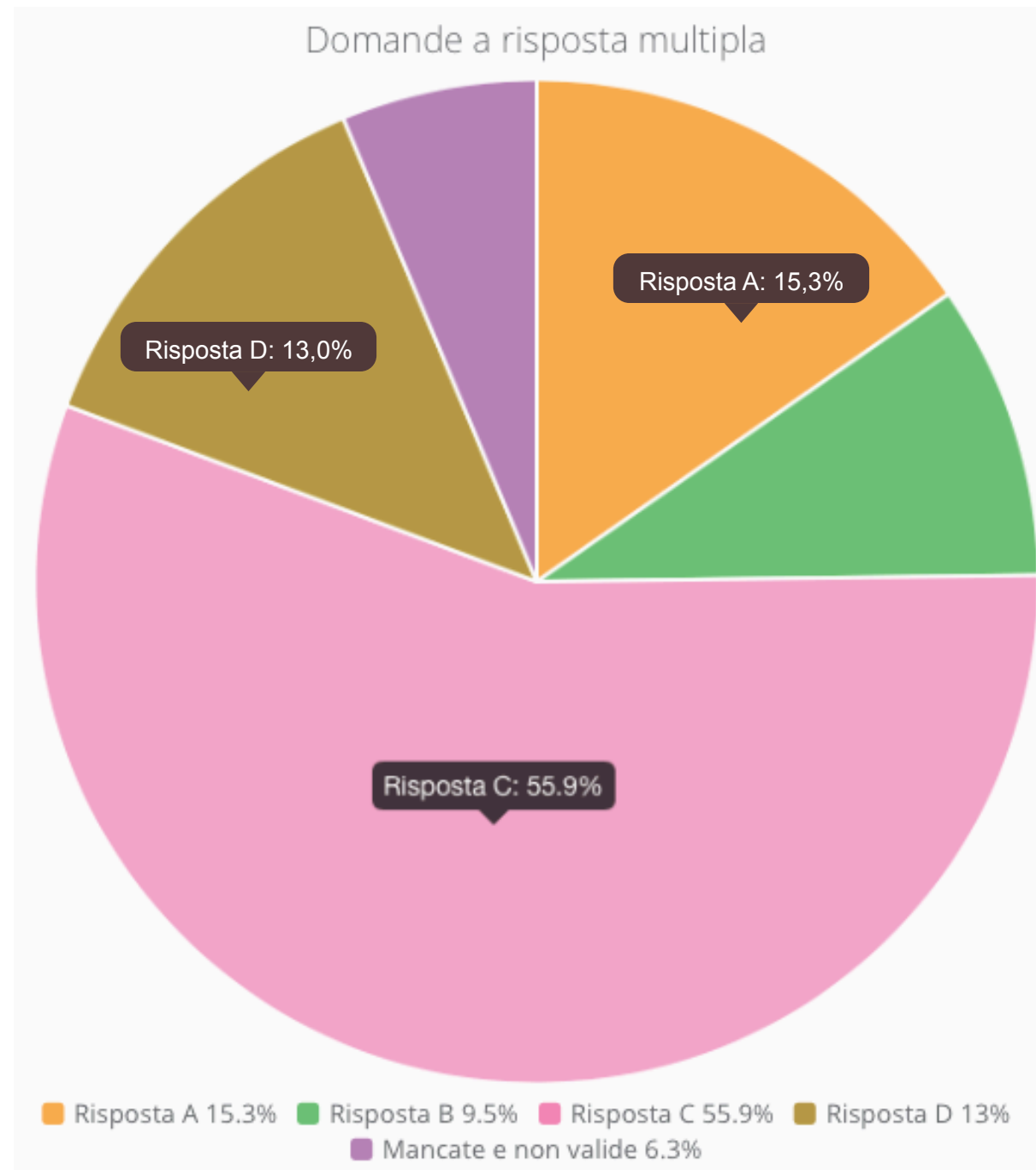
Per frequentare una piscina si deve acquistare una tessera da 10 € e pagare 7 € per ogni ingresso. Luigi può spendere al massimo 100 €. Se n indica il numero degli ingressi, quale tra le seguenti disequazioni descrive il numero di ingressi che Luigi può effettuare?

- A. ☐ $(10+7)n \leq 100$
- B. ☐ $10n+7 \leq 100$
- C. ☒ $10+7n \leq 100$
- D. ☐ $10+7n \geq 100$

- Relazione fra costanti e variabili
- Aspetti linguistici

QUESITO D31_2016 G10

Risultati



Per frequentare una piscina si deve acquistare una tessera da 10 € e pagare 7 € per ogni ingresso. Luigi può spendere al massimo 100 €. Se n indica il numero degli ingressi, quale tra le seguenti disequazioni descrive il numero di ingressi che Luigi può effettuare?

- A. ☐ $(10 + 7)n \leq 100$
- B. ☐ $10n + 7 \leq 100$
- C. ☒ $10 + 7n \leq 100$
- D. ☐ $10 + 7n \geq 100$



Difficoltà a interpretare le parti di una espressione algebrica e le relazioni fra di esse



2. Espressioni equivalenti, significati diversi: per un apprendimento “sensato” dell'algebra

Un altro esempio famoso

Che cosa possiamo dire del numero che risulta dalla differenza fra il cubo di un numero e il numero stesso? [Arcavi, 1994]

$$\boxed{\begin{array}{c} n^3 - n \\ 5^3 - 5 \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} n(n^2 - 1) \\ 5(5^2 - 1) \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} n(n-1)(n+1) \\ 5 \times 4 \times 6 \end{array}}$$

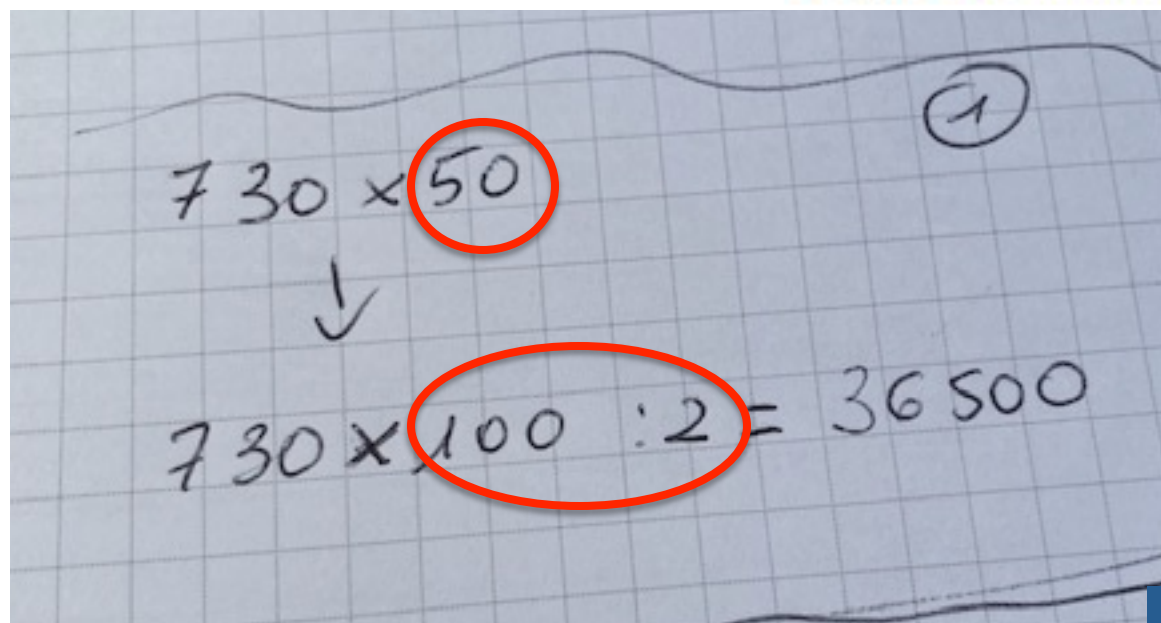
Differenza fra il cubo di un numero e il numero stesso

Prodotto di tre numeri consecutivi

QUESITO D28_2012 G05

D28. Nella tua classe l'insegnante chiede di moltiplicare a mente 730×50 . Scrivi come faresti tu per trovare rapidamente il risultato usando il calcolo mentale.

Risposta:

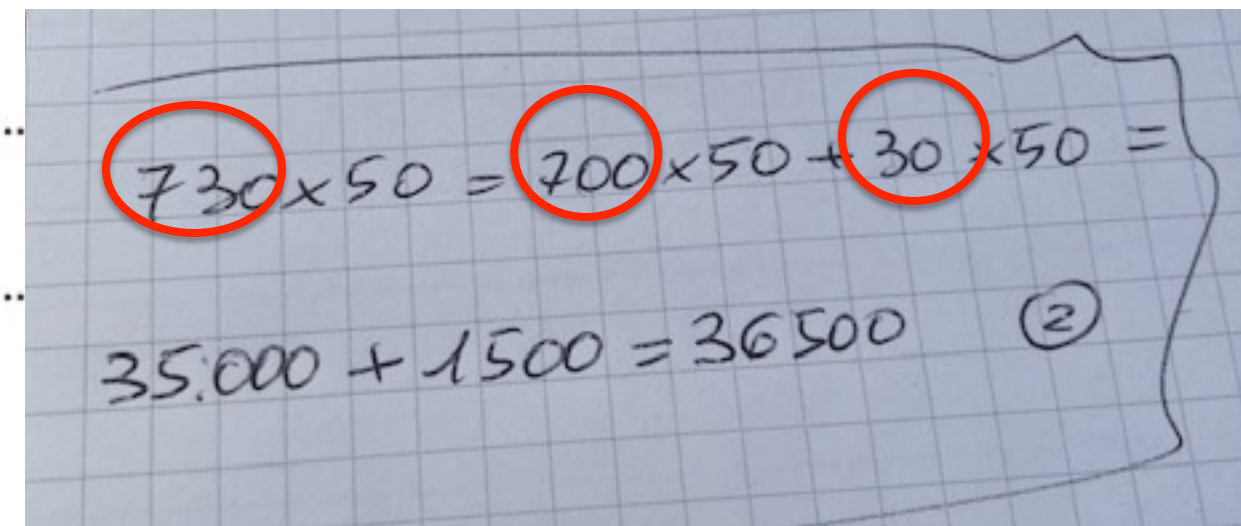


①

$$730 \times 50$$

↓

$$730 \times 100 : 2 = 36500$$



②

$$730 \times 50 = 700 \times 50 + 30 \times 50 =$$

$$35000 + 1500 = 36500$$

- espressioni equivalenti
- trasformazioni “mirate”



QUESITO D22_2013 G08

D22. Se n è un numero naturale, allora il numero $n(n + 2)$

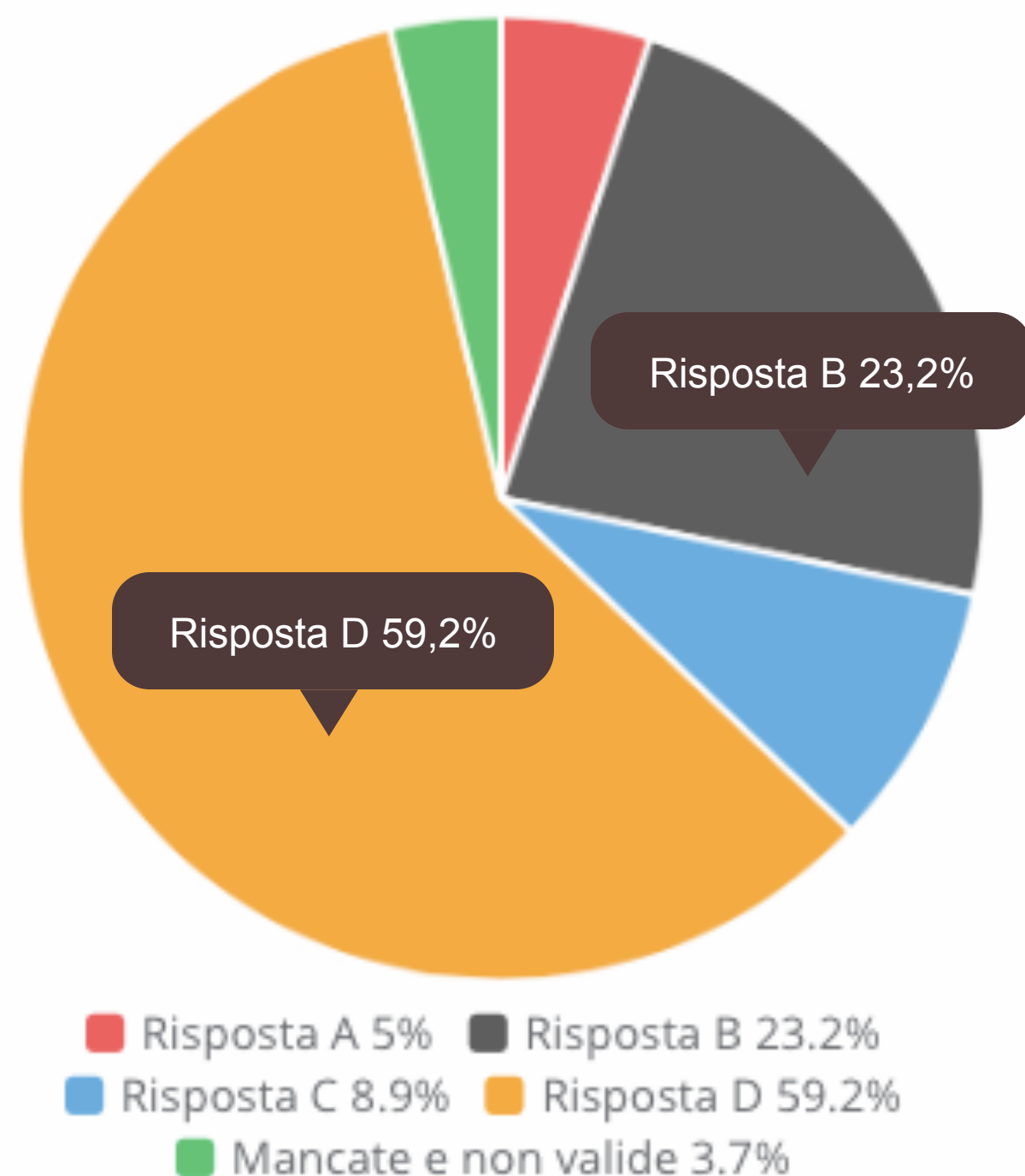
- A. ☐ è sempre dispari
- B. ☐ è sempre pari
- C. ☐ è dispari se n è pari
- D. ☒ è dispari se n è dispari

▪ Dare significato alle
espressioni algebriche

QUESITO D22_2013 G08

Risultati

Domande a risposta multipla



D22. Se n è un numero naturale, allora il numero $n \cdot (n + 2)$

- A. ☐ è sempre dispari
- B. ☐ è sempre pari
- C. ☐ è dispari se n è pari
- D. ☒ è dispari se n è dispari

QUESITO pre-test_2018 G13

Domanda

Considera la funzione polinomiale $p(x) = x^2 - 4x$ definita nell'insieme dei numeri reali.

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

Per rispondere clicca su una alternativa in ogni riga.

		V	F
1. $p(x)$ si annulla per un solo valore di x	FALSO	☐	☐
2. $p(x)$ non assume valori minori di -4		☐	☐
3. Se x è positiva $p(x)$ è positiva	FALSO	☐	☐

$$p(x) = x^2 - 4x = x(x - 4)$$

- espressioni equivalenti
- trasformazioni “mirate”

QUESITO pre-test_2018 G13

Domanda

Una società offre ai clienti la possibilità di investire un certo capitale secondo la legge $C_t = C_0(1 + i)^t$
dove:

- C_0 è il capitale iniziale investito al tempo $t = 0$;
- C_t è il capitale disponibile (montante) dopo t anni dall'inizio dell'investimento;
- i è il tasso di interesse annuo.

Domanda 2/2

A quale tasso di interesse annuo Anna deve investire 20000 € per ottenere tra due anni 21000 € ?

Scrivi il risultato in forma percentuale e approssimalo inserendo una cifra in ciascuna casella.

Digita la risposta alla domanda.

Risposta: %

PENSIERO ANTICIPATORIO

- Impostare l'equazione
- Trasformare l'equazione

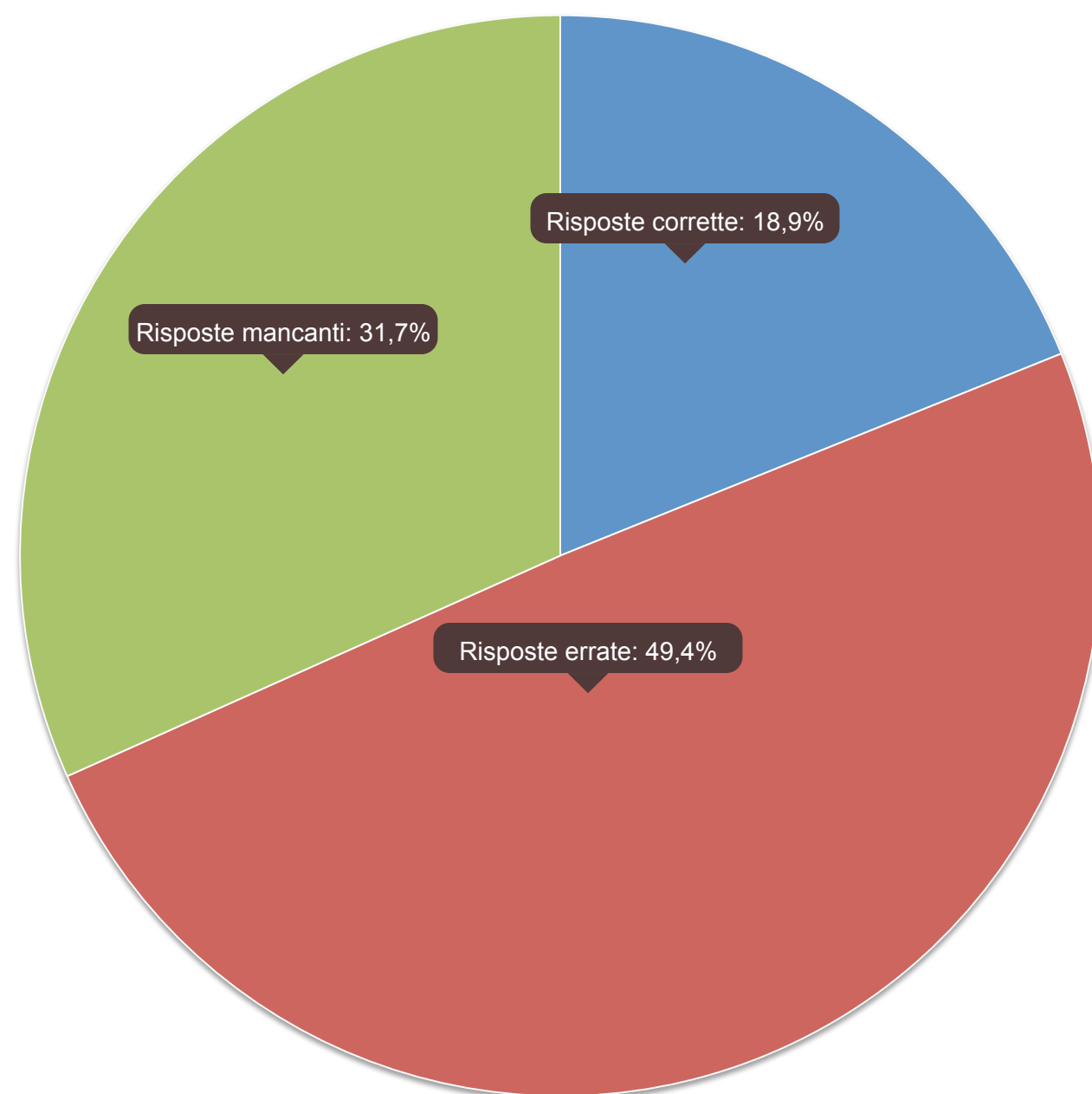
$$21000 = 20000(1 + i)^2$$

$$\frac{21000}{20000} = (1 + i)^2$$

$$(1 + i) = \sqrt{\frac{21000}{20000}}$$

QUESITO pre-test_2018 G13

Risultati



■ Risposte corrette 18,9 ■ Risposte errate 49,4 ■ Risposte mancanti 31,7

Domanda

Una società offre ai clienti la possibilità di investire un certo capitale secondo la legge $C_t = C_0(1 + i)^t$ dove:

- C_0 è il capitale iniziale investito al tempo $t = 0$;
- C_t è il capitale disponibile (montante) dopo t anni dall'inizio dell'investimento;
- i è il tasso di interesse annuo.

Domanda 2/2

A quale tasso di interesse annuo Anna deve investire 20000 € per ottenere tra due anni 21000 € ?
Scrivi il risultato in forma percentuale e approssimalo inserendo una cifra in ciascuna casella.

Digita la risposta alla domanda.

Risposta: %

Un esempio di soluzione

Handwritten mathematical solution on grid paper:

$$\begin{aligned} 20\,000 &= 100\% \\ 10\,000 &= 50\% & 2000 &= 10\% \\ 10000 &= 5\% & & 2\% \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} 100 : 20000 &= 2 : X \\ X &= 400 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} 100 : 20400 &= 2 : X \\ X &= 408 \end{aligned}$$

→ Se il tasso di interesse fosse il 2%, dopo un anno il Capitale C_1 sarebbe $20\,400 + 408 = 20\,808$

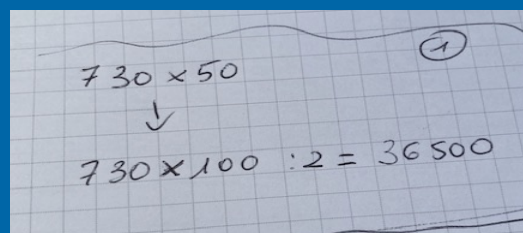
Mancato utilizzo dello strumento algebrico

Un altro esempio di soluzione

$$\begin{aligned}
 5) \quad C_T &= C_0 (1+i)^t \\
 21000 &= 20000 (1+i)^2 \\
 \frac{21000}{20000} &= \frac{20000}{20000} (+i^2 + 2i + 1) \\
 \frac{21}{20} &= i^2 + 2i + 1 \\
 i^2 + 2i - \frac{1}{20} &= 0 \\
 \Delta &= 4 + \frac{1}{5} = \frac{21}{5} \\
 \frac{-2 \pm \sqrt{\frac{21}{5}}}{2} &\begin{cases} 2,02 \\ 0,02 \end{cases}
 \end{aligned}$$

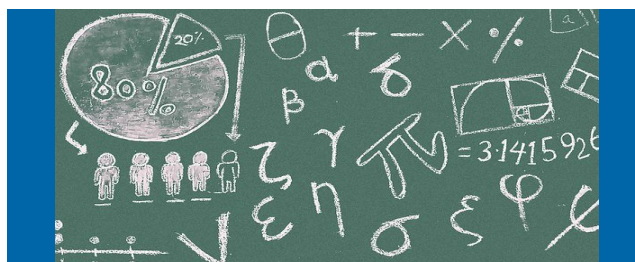
Perdita di significato delle trasformazioni algebriche e del risultato ottenuto

Quali sono le criticità che emergono su questo aspetto?

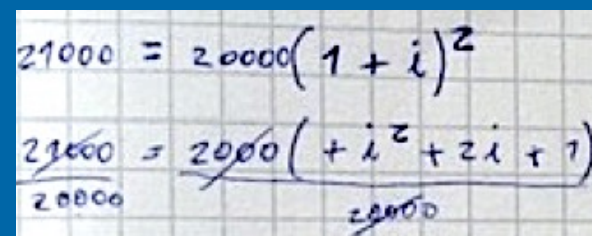


$$\begin{array}{l} 730 \times 50 \\ \downarrow \\ 730 \times 100 : 2 = 36500 \end{array}$$

Difficoltà a riconoscere l'aspetto relazionale nell'aritmetica



Difficoltà a dare significato alle espressioni algebriche, trasformandole in espressioni equivalenti ma con significati diversi



$$\begin{array}{l} 21000 = 20000(1+i)^2 \\ \frac{21000}{20000} = \frac{20000}{20000} (+i^2 + 2i + 1) \end{array}$$

Difficoltà a trasformare espressioni algebriche "anticipando" la forma che esse potrebbero assumere

Riassumendo

Algebra come strumento di pensiero

Nella scuola secondaria di primo grado lo studente acquisisce più strumenti e il linguaggio algebrico può essere utilizzato per esprimere proprietà generali come ad esempio le proprietà dei numeri. Per arrivare poi, alla scuola secondaria di II grado a utilizzare il linguaggio algebrico per risolvere problemi, rappresentare congetture e produrre dimostrazioni.

Dal particolare al generale

Nei primi anni si introducono le operazioni tra numeri e le relazioni che tra esse intercorrono (per es. essere una l'inversa dell'altra). Le operazioni sono anche funzioni questo consente di sviluppare il carattere algebrico dell'aritmetica.

Salendo di grado, l'uso delle lettere come incognite e come variabili permette di considerare operazioni anche tra numeri non noti.

CONTINUITÀ VERTICALE



Indicazioni Curricolari

P	Traguardi Scuola Primaria	• Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici. • Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici [...]
S1	Traguardi Scuola Secondaria di 1° grado	• Utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni, ...) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale.
S2	Linee Guida Indicazioni Nazionali classe seconda sec. di II grado	Linee Guida • Le espressioni letterali e i polinomi. • Padroneggiare l'uso della lettera come mero simbolo e come variabile [...]. Indicazioni Nazionali • <i>Elementi di base del calcolo letterale.</i> • <i>Capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica.</i> • <i>Descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni.</i>



Approfondimenti

<http://www.progettoaral.it/>



Si tratta di un progetto coordinato da N. Malara e G. Navarra e che coinvolge moltissime scuole sul territorio nazionale. Il progetto promuove l'insegnamento dell'aritmetica in una prospettiva algebrica sin dai primi anni della scuola primaria, se non dalla scuola dell'infanzia.

Approfondimenti

M@T.ABEL

L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica



Attività ideata per il primo biennio della scuola sec. di II° grado.

L'attività propone situazioni problematiche in cui il linguaggio dell'algebra supera quello dell'aritmetica e diventa strumento per esprimere relazioni e generalizzare: un linguaggio utile sia per comprendere sia per dimostrare.

Disponibile, tra le altre risorse, su

http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/laritmetica-aiuta-lalgebra-e-lalgebra-aiuta-laritmetica/



Unione Europea
P.O.N. - "Competenze per lo Sviluppo" (FSE)
D.G. Occupazione, Affari Sociali e pari Opportunità



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
Dipartimento per la Programmazione
D.G. per gli Affari Internazionali - Ufficio IV
Programmazione e gestione dei fondi strutturali europei
e nazionali per lo sviluppo e la coesione sociale



L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica
a cura di Nicoletta Nolli, Silvano Rossetto, Sergio Zoccante

PERCORSO DIDATTICO

Introduzione

- Introduzione**
- Riferimenti curriculari**
- Descrizione dell'attività**
- Indicazioni metodologiche**
- Spunti per un approfondimento disciplinare**
- Elementi per prove di verifica**
- Spunti per altre attività con gli studenti**
- Bibliografia e sitografia**
- Proposta di attività per il corsista**

I numeri, visti come campo di esperienza, offrono una base per la costruzione del significato dei simboli algebrici e delle operazioni che ne permettono la manipolazione.

Da un lato, soltanto una profonda comprensione delle scritture che usiamo per rappresentare i numeri, delle relazioni fra insiemi numerici diversi, delle operazioni e delle loro proprietà, permette il passaggio al codice simbolico; d'altra parte, il ritorno dalla formula al numero è, per chi apprende, un modo per dare significato ai simboli.

Le proprietà delle operazioni negli insiemi numerici devono essere interiorizzate e non date per scontate, per arrivare a riconoscere l'equivalenza fra formule apparentemente diverse; la "decantazione" del significato deve poggiare su basi ben solide per poter applicare, quando necessario, la "macchina del calcolo".

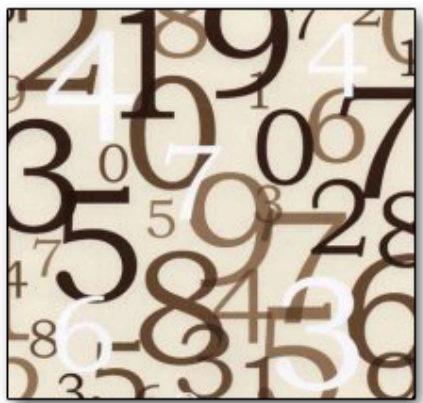
È stato sottolineato che l'obiettivo dell'insegnamento dell'algebra è far sì che "gli allievi imparino a diventare padroni del senso dei simboli che usano, evitando quell'addestramento per memorizzazione di regole e meccanismi formali, il quale favorisce invece l'idea che il senso di una formula e delle trasformazioni su di essa consista soltanto nella sua struttura segnica. D'altra parte non si tratta di fare cose diverse o in più rispetto a quelle che di solito si fanno; si tratta solo di farle con una prospettiva, una metodologia e in un contesto diverso".

Nel trasformare una formula si può produrre nuova informazione e rivelare aspetti inconsueti della situazione a cui la formula si riferisce.

La "sensazione" dei simboli guida nella manipolazione di espressioni del linguaggio algebrico, passando a espressioni equivalenti (ossia aventi lo stesso significato), ma più adeguate a scoprire proprietà. (da "Algebra, fra tradizione e rinnovamento", MIUR, 2005).

Questa attività è proponibile ad una classe prima, nell'ambito della prima introduzione sistematica del calcolo simbolico o calcolo algebrico (espressioni da preferire a "calcolo letterale").

Si presuppone che gli alunni abbiano già analizzato le proprietà delle operazioni e abbiano già usato lettere per simbolizzare e generalizzare, ma ancora non abbiano esplicitato le regole di calcolo.





GRAZIE

